9 класс

9.1 Шесть мальчиков нашли четырнадцать грибов. Докажите, что хотя бы двое из них нашли грибов поровну.

Решение:

Занумеруем мальчиков. Пусть i–й мальчик нашел a_i грибов, i=1,2,3,…,6. Тогда $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=14$ по условию. Если предположить, что все числа a_i различны, то их сумма окажется больше 14:

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \geq 0+1+2+3+4+5=15$.

Пришли к противоречию. Утверждение доказано.

9.2 Докажите, что если $p \geq 5$, то оба корня уравнения $x^2+px+p+1=0$ больше $\dfrac{p}{p-2}$.

Решение:

Пусть x_0 – корень уравнения $x^2+px+p+1=0$. Тогда $px_0=p+x_0^2+1$. Воспользуемся неравенством $x_0^2+1 \geq 2x_0$ (т.е. фактически очевидным неравенством $(x_0-1)^2 \geq 0$, из которого имеем $x_0^2-2x_0+1 \geq 0$).

В результате получим:

$px_0 \geq p+2x_0$, откуда $x_0 \geq \dfrac{p}{p-2}$. Что и требовалось доказать.

9.3 Выясните, справедливо ли следующее утверждение: неравенство $a^4+1 \geq 2a^3$ выполняется при всех $a \geq 1$.

Решение:

Исходное неравенство можно заменить следующим $a^4+2a^3+1 \geq 0$. Выясним, верно ли это неравенство для $a \geq 1$.

Выполним преобразования:

$$a^4+2a^3+1=a^4-a^3-(a^3-1)=a^3(a-1)-(a-1)(a^2+a+1)=$$
$$=(a-1)(a^3-a^2-a-1).$$

Из последнего выражения видно, что если $a>1$, но a достаточно близко к 1, то $a^3-a^2-a-1<0$, т.е. $a^4+2a^3+1<0$. Пришли к противоречию.

Значит утверждение не справедливо.

Для проверки верности решения можно произвести вычисления для конкретного a, например, для $a=1,1$.

9.4 Последовательность чисел *x1, x2, x3,…* образована по закону: $x_1,...,x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{n}$ для *n=1,2,3…* Найдите x_{2013}.

Решение:

Найдем $x_2 = 1 + \frac{1^2}{1} = 2$, $x_3 = 1 + \frac{2^2}{2} = 3$, $x_4 = 1 + \frac{3^2}{3} = 4$ и т.д.

Используя индукцию, получаем $x_n = n$, откуда $x_{2013} = 2013$.

9.5 Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника.

Решение:

См. рисунок. A_1, B_1, C_1 – середины соответствующих сторон BC, CA, AB. Так как $BC_1=BA_1$, то BA=BC, т.е. треугольник ABC –равнобедренный. Теперь легко понять, что окружность касается стороны AC в точке B_1(потому что возможные точки пересечения окружности с прямой AC располагаются симметрично относительно прямой BB_1). В прямоугольном треугольнике BB_1A видим: BB_1=r, BA=2r, т.е. катет равен половине гипотенузы. Такой катет лежит против угла 30^o.

Ответ: 30^o, 30^o, 120^o.