9 класс

9.1. На окружности отмечены десять точек. Каждые две из них соединены отрезком. Коля покрасил точки в два цвета (каждую точку в какой-то один цвет). Какое наибольшее количество отрезков с концами в точках разного цвета могло получиться?

Решение:

Пусть x точек окрашены в первый цвет, тогда $10-x$ точек окрашены во второй цвет. Число отрезков с разноцветными концами, очевидно, равно $x(10-x)$. Нам нужно найти наибольшее значение выражения $x(10-x)$ при x=0,1,2…10.

Имеем $x(10-x) = 10x-x^2 = 25-(25-10x+x^2) =25-(5-x)^2$. Теперь понятно, что наибольшее значение получается при x=5 и равно 25.

Ответ: 25.

9.2. Решите уравнение $||x|-1|+1=|x|$.

Решение:

Данное уравнение запишем в виде $||x|-1|=|x|-1$.

Заметим, что равенство $|a|=a$ означает , что $a\geq 0$, откуда имеем: $|x|-1\geq 0$.

Получившееся неравенство равносильно неравенству $|x|\geq 1$. Это и дает нам ответ.

Ответ: $x\leq -1$ или $x\geq 1$.

9.3. Докажите, что из 26 девочек можно выбрать или 6 девочек с одинаковыми именами, или 6 девочек с различными именами.

Решение:

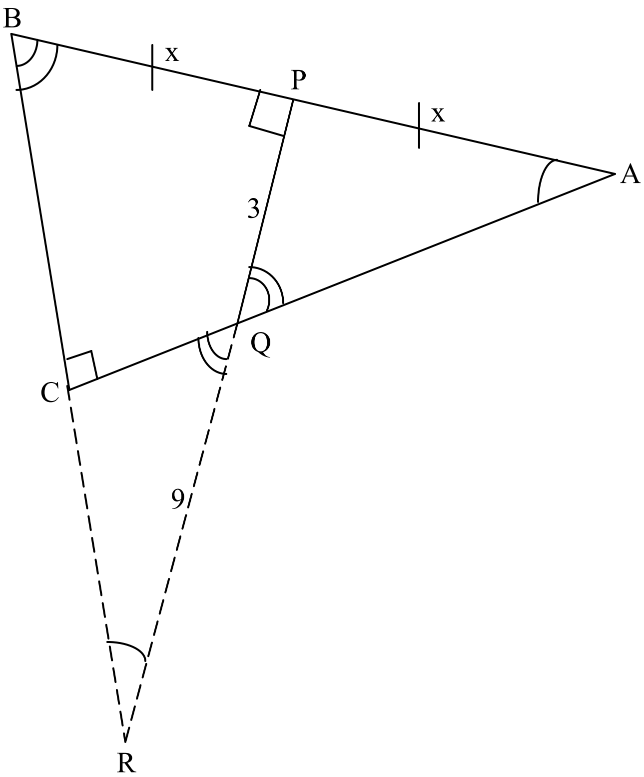
6 различных имен либо есть, либо нет. Если есть, то все ясно. Если нет, нужно доказать, что в таком случае 6 девочек могут иметь одинаковое имя.

Итак, получается, что в последнем случае различных имен не более 5. Так как девочек 26, то найдется имя, которое носят хотя бы 6 девочек (если бы каждое имя имелось бы у не более чем пяти девочек, то всего девочек было бы не больше 5*5=25).

Доказано.

9.4. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведен перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключенный внутри треугольника, равен 3, а вне треугольника (до пересечения с продолжением другого катета) - равен 9. Найдите длину гипотенузы.

Решение:



Треугольник RPB подобен треугольнику APQ (поскольку все соответствующие углы равны). Из подобия треугольников: $\frac{BP}{PR}=\frac{PQ}{PA}$.

Имеем следующее: $\frac{x}{12}=\frac{3}{x}$. Следовательно, x^2=36, x=6, AB=$2x$=12.

Ответ: 12.

9.5. Докажите, что при всех значениях $\boldsymbol{x}$ справедливо неравенство $x^{12}-x^9+x^4-x^3+1>0$.

Решение:

Если $x\leq 0$, то, поскольку $x^{12}\geq 0$, $-x^9\geq 0$, $x^4\geq 0$, $-x^3\geq 0$, доказываемое неравенство верно.

Рассмотрим случай, когда $x>0$.

Если $0<x\leq 1$, то $x^4\geq x^9$ и $-x^9+x^4\geq 0$, а кроме того, $x^{12}-x^3+1=x^{12}+(1-x^3)>0$, т.к. $x^{12}>0$ и $x^3\leq 1$. Значит в этом случае доказываемое неравенство справедливо.

Наконец, если $x>1$, то $x^{12}>x^9$, $x^4>x^3$ и поэтому $(x^{12}-x^9)+(x^4-x^3)+1>1>0$.

Доказано.