8 класс

8.1 Решить уравнение: $\left|x^2-4x-12\right|=6-x.$

<u>Решение:</u>

$$\begin{cases} 6-x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-18=0, \\ x^2-5x-6=0, \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-3, \\ x=6, \\ x=-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: 6; -3; -1.

8.2 Определить через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую?

<u>Решение:</u>

Обозначим через x число минутных делений, которые пройдет часовая стрелка до встречи с минутной стрелкой. Минутная стрелка за это же время пройдет $45+x$ минутных делений. Но так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то $12x=45+x$. Отсюда $x=4\frac{1}{11}$ минутных делений. Таким образом, минутная стрелка догонит часовую через $(45+x)$ минут, т.е. через $49\frac{1}{11}$ минуты.

Ответ: $49\frac{1}{11}$ минуты.

8.3 ***Докажите, что если*** $a\ge 0, b\ge 0, a+b=1,$ ***то*** $\frac{(1+a)(1+b)}{1+ab}\ge\frac{9}{5}$.

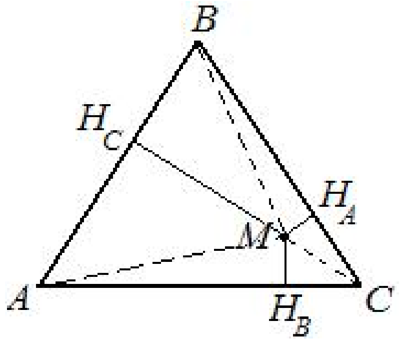
<u>Решение:</u>

Имеем $4ab\le(a+b)^2=1$, т.е. $ab\le\frac{1}{4}$.

Далее $\frac{(1+a)(1+b)}{1+ab}=\frac{1+a+b+ab}{1+ab}=\frac{2+ab}{1+ab}=1+\frac{1}{1+ab}\ge 1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

8.4 Из точки внутри равностороннего треугольника опускаются перпендикуляры на стороны. Докажите, что сумма их длин не зависит от выбора точки.

Решение:



Дано: ABC – треугольник, $AB=BC=AC=a$, M – любая точка внутри ΔABC, $MH_A \perp BC$, $MH_B \perp AC$, $MH_C \perp AB$.

Доказать: $MH_A + MH_B + MH_C = const$.

Доказательство.
Дополнительные построения: *AM, BM, CM*.

$$S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2} MH_B \cdot AC,\ S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} MH_C \cdot AB,\ S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} MH_A \cdot BC,$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2} MH_B \cdot AC + \frac{1}{2} MH_C \cdot AB + \frac{1}{2} MH_A \cdot BC,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a\left(MH_B + MH_C + MH_A\right) \quad \Rightarrow \quad MH_B + MH_C + MH_A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a}.$$

Следовательно, сумма длин перпендикуляров не зависит от выбора точки *M*: $MH_A + MH_B + MH_C = const$.

8.5 m целых положительных чисел (не обязательно различных), не превосходящих n, выписаны в порядке неубывания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m$.

Аналогично n целых положительных чисел, не превосходящих m, расположены в порядке неубывания: $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$

Докажите, что найдутся два номера i и j, такие что $a_i + i = b_j + j$.

Решение:

Так как $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m \le n$,

то $2 \le a_1 + 1 < a_2 + 2 < \ldots < a_m + m \le n + m$,

Аналогично $2 \le b_1 + 1 < b_2 + 2 < \ldots < b_n + n \le m + n$.

Таким образом, получается, что в пределах от 2 до $m+n$ находятся $m+n$ целых чисел a_i+i и b_j+j $(i=1,...,m),(j=1,...,n)$. Значит, какие-то два из них непременно совпадают. Но числа a_i+i все различны – среди них нет совпадений, аналогично нет совпадений среди чисел b_j+j. Поэтому совпадут какие-то два числа a_i+i и b_j+j.