

8 класс

8.1 Докажите, что если $x + z = y + \frac{xz}{y}$, то среди чисел x, y, z есть равные.

Решение:

$$0 = x + z - y - \frac{xz}{y} = (x - y) - z\left(\frac{x}{y} - 1\right) = (x - y)\left(1 - \frac{z}{y}\right)$$

Значит, либо $x=y$, либо $z/y=1$, т.е. $z=y$.

8.2 Решите неравенство $x^2 + x - 10 < 2|x - 2|$

Решение:

Неравенство равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 + x - 10 < 2x - 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x^2 + x - 10 < 4 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x^2 + 3x - 14 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ -2 < x < 3 \end{cases} \quad \frac{-3 - \sqrt{65}}{2} < x < 2$$

$$2 \leq x < 3$$

Ответ: 2.

8.3 Ученику прислали задание, состоящее из двадцати задач. За каждую верно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную – минус 5 баллов, за задачу, которую он не брался решать, – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он брался решать?

Решение:

Пусть ученик решил верно x задач, решил неверно y задач и не взялся решать z задач. По условию

$$\begin{cases} x + y + z = 20, & (1) \\ 8x - 5y + 0z = 13 & (2) \end{cases}$$

$$8x - 5y = 13$$

$$8x + 8y = 13 + 3y$$

$$8(x + y) = 13(1 + y) \quad (3)$$

Тогда $(x + y)$ делится на 13, а так как $x + y \leq 20$, то

$$x + y = 0 \text{ или } x + y = 13.$$

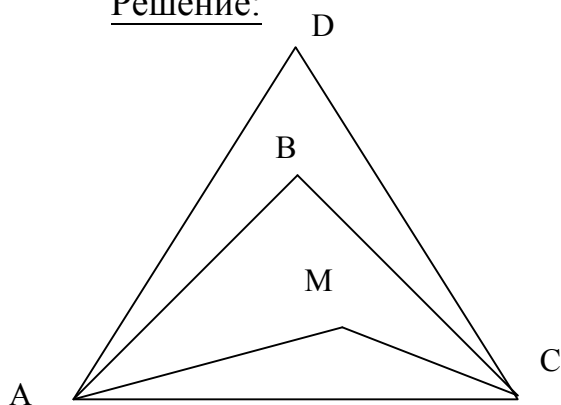
Если $x + y = 0$, то $x = y = 0$, то эти значения не удовлетворяют (2). Следовательно, $x + y = 13$.

Если $x + y = 13$, то из (1) $z = 7$, а из (3) $1 + y = 8$, $y = 7$ и $x = 6$.

Ответ: 13.

8.4 *Внутри треугольника ABC отмечена точка M так, что $\angle MAC = 10^\circ$, $\angle MCA = 30^\circ$. Найдите величину угла AMB , если $\angle ABC = 80^\circ$, $AB = BC$.*

Решение:



Рассмотрим равносторонний $\triangle ADC$, где точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC .

$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC = 30^\circ$ (точки B и D лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AC).

$$\angle DAB = \angle DAC - \angle BAC = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ.$$

Получаем, что $\triangle ADB = \triangle ACM$ ($AD = AC$, $\angle ADB = \angle ACM$, $\angle DAB = \angle CAM$), поэтому

$$AB = AM \Rightarrow \angle AMB = \angle ABM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MAB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$$

Ответ: 70° .

8.5 Пусть a – корень уравнения $(x-1)^2 x = 1$.

Вычислите значение выражения $a^2 + \frac{1}{a-2}$

Решение:

$$a^2 + \frac{1}{a-2} = \frac{a^2(a-2)+1}{a-2} = \frac{(a^2-2a+1)a-a+1}{a-2} = \frac{(a-2)^2-a+1}{a-2} = \frac{1-a+1}{a-2} = -1$$