8 класс

8.1 Докажите, что если $\boldsymbol{a>0}$, $\boldsymbol{b>0}$, то хотя бы одна из дробей $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{b+1}$, $\frac{ab}{ab+1}$ не меньше $\frac{1}{2}$.

<u>Решение:</u>

Рассмотрим два случая.

1. Хотя бы одно из чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не больше 1. Например, $a\le 1$, тогда $a+1\le 2$ и поэтому $\frac{1}{a+1}\ge\frac{1}{2}$. Аналогично, если $b\le 1$, *то* $\frac{1}{b+1}\ge\frac{1}{2}$.

2. Оба числа больше 1: $a>1$, $b>1$. Рассмотрим третью дробь:

Нам нужно, чтобы выполнялось неравенство: $\frac{ab}{ab+1}\ge\frac{1}{2}$, т.е. $\frac{ab}{ab+1}-\frac{1}{2}\ge 0$. Приводя к общему знаменателю, получаем: $\frac{ab}{ab+1}-\frac{1}{2}=\frac{ab-1}{2(ab+1)}$. При этом $\frac{ab-1}{2(ab+1)}>0$, поскольку $ab>1$.

Доказано.

8.2 Найдите три числа $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ по следующим условиям: $x+y+z=1$, $y\ge z$, $x^2+4y^2+x^2y = 4xy+x^2z$.

<u>Решение:</u>

Преобразуем равенство $x^2+4y^2+x^2y = 4xy+x^2z$:

$x^2-4xy+4y^2+x^2y-x^2z=0$,

$(x-2y)^2+x^2(y-z)=0$.

При условии $y\ge z$ получаем, что сумма двух неотрицательных слагаемых равна 0. Это равносильно тому, что каждое слагаемое равно 0, т.е.:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ x^2(y-z)=0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе равенство. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю.

Если $x=0$, то $y=0$ и, следовательно, $z\le 0$, так что не может выполняться условие $x+y+z=1$. Если же $x\ne 0$, то получаем $y-z=0$. В итоге получается система уравнений:

$$\begin{cases} x-2y=0, \\ y-z=0, \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

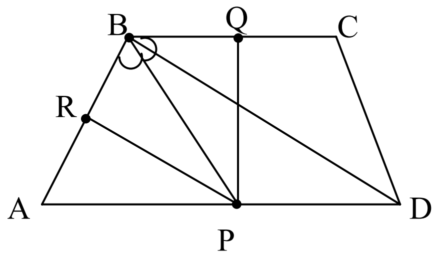
x=1/2, y=z=1/4.

Ответ: $x=\frac{1}{2},\ y=z=\frac{1}{4}$.

8.3 ***ABCD*** – трапеция. Точки ***P*** и ***Q*** – середины оснований ***AD*** и ***BC*** соответственно. Оказалось, что ***AB=BC**** , а точка ***P*** лежит на биссектрисе угла ***B***. Докажите, что ***BD=2PQ***.

Решение:

См. рисунок. BA=BC, ∠ABP=∠QBP. Пусть R – середина AB, тогда



BR=BQ, так как $BR=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}BC=BQ$. Значит, треугольники BRP и BQP равны (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому PR=PQ. Но PR – средняя линия в треугольнике BAD, так что BD=2PR и таким образом BD=2PQ.

Что и требовалось доказать.

8.4 Пусть ***a*** – корень уравнения ***(x-1)²x=1***. Вычислите значение выражения $a^2+\frac{1}{a-2}$.

Решение:

По условию $(a-1)^2a=1$,

выполним преобразования:

$(a^2-2a+1)a=1$,

$a^3-2a^2+a=1$,

---

* При тиражировании заданий была допущена опечатка. В задании было указано «Оказалось, что ***AB=DC***…» В такой формулировке задача не имеет решения. В связи с этим оргкомитетом олимпиады принято решение выставить всем участникам-восьмиклассникам максимальную оценку (7 баллов) по задаче №3.

$a^2(a-2)+a=1$,

$a^2(a-2)+a-2=-1$,

$a^2(a-2)+1=2-a$.

Теперь почленно разделим равенство на а-2:

$a^2+\dfrac{1}{a-2}=-1$.

Ответ: -1.

Альтернативный вариант решения **задачи 8.4** (предложен одним из участников олимпиады)

В выражении $a^2+\dfrac{1}{a-2}$ приведем слагаемые к общему знаменателю:

$$a^2+\frac{1}{a-2}=\frac{a^2(a-2)+1}{a-2}=\frac{a^3-2a^2+1}{a-2}=\frac{a((a^2-2a+1)-1)+1}{a-2}=$$

$$=\frac{a(a-1)^2-a+1}{a-2}.$$

Так как *a*=*x*, то $a(a-1)^2=1$,

поэтому $\dfrac{a(a-1)^2-a+1}{a-2}=\dfrac{1-a+1}{a-2}=\dfrac{1-a+1}{a-2}=\dfrac{2-a}{a-2}=-\dfrac{a-2}{a-2}=-1$.

Ответ: -1.

8.5 На собеседование пришли 65 школьников. Им предложили 3 контрольные работы. За каждую контрольную ставилась одна из оценок: 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки на всех контрольных?

Решение:

Каждому из 65 школьников сопоставим набор из трех его оценок за контрольные работы: (ε_1, ε_2, ε_3), где ε_i=2,3,4 или 5. Число всех возможных таких наборов равно 4^3=64. Поэтому среди 65 наборов обязательно найдутся два одинаковых.

Утверждение верно.