8 класс

8.1 Найдите значение выражения $\sqrt{\dfrac{k^3a^3-l^3b^3}{ka-lb}+\dfrac{l^3a^3+k^3b^3}{la+kb}}$, если a,b и k,l – длины катетов двух неподобных прямоугольных треугольников, гипотенузы которых имеют длины соответственно 25 и 4.

Решение:
$\dfrac{k^3a^3-l^3b^3}{ka-lb}=\dfrac{(ka)^3-(lb)^3}{ka-lb}=\dfrac{(ka-lb)(k^2a^2+kalb+l^2b^2)}{ka-lb}=k^2a^2+kalb+l^2b^2$,
аналогично $\dfrac{l^3a^3+k^3b^3}{la+kb}=l^2a^2-lakb+k^2b^2$, поэтому сумма дробей, стоящих под знаком квадратного корня, равна $k^2a^2+kalb+l^2b^2+l^2a^2-lakb+k^2b^2=$ $=k^2a^2+k^2b^2+l^2b^2+l^2a^2=\left(a^2+b^2\right)\left(k^2+l^2\right)$.
По теореме Пифагора $a^2+b^2=25^2$, $k^2+l^2=4^2$. Получаем ответ: $\sqrt{25^2\cdot 4^2}=25\cdot 4=100$.

Ответ: 100.

8.2 Один продавец продает сливы по 150 рублей за килограмм, а другой – по 100 рублей. Но у первого косточка занимает треть веса каждой сливы, а у второго – половину. Чьи сливы выгоднее покупать?

Решение:

Купим у каждого торговца слив на одну и ту же сумму и посмотрим, где мякоти получается больше. Покупаем, например, на 300 рублей. У первого мы купим 2 кг, в которых косточек будет $\dfrac{1}{3}\cdot 2=\dfrac{2}{3}$(кг), а мякоти $2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$(кг). У второго мы купим 3кг, в которых косточек будет $\dfrac{1}{2}\cdot 3=\dfrac{3}{2}$(кг), а мякоти $3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$(кг). Так как $\dfrac{3}{2}>\dfrac{4}{3}$. Значит, выгоднее покупать у второго.

Ответ: выгоднее покупать у второго продавца.

8.3 Докажите, что если a,b,c – положительные числа, то хотя бы одно из уравнений $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ не имеет корней.

Решение:

Рассмотрим дискриминанты этих уравнений b^2-4ac, c^2-4ab, a^2-4bc. По меньшей мере, один из этих дискриминантов отрицателен.

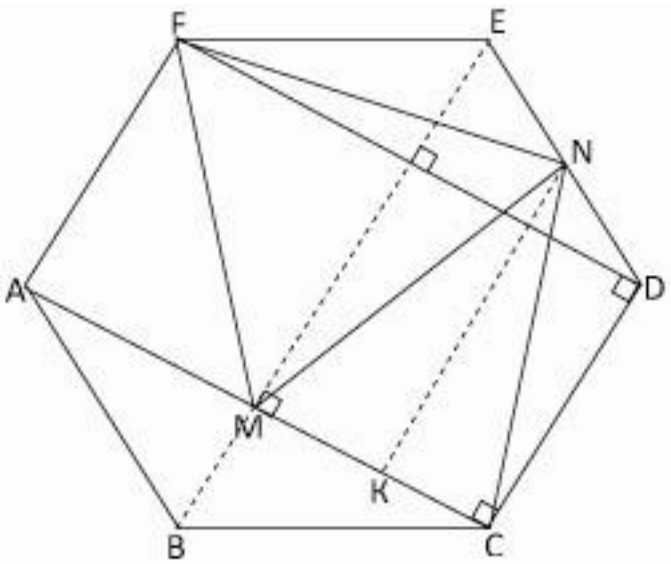
Действительно, возьмем наименьшее из чисел *a,b,c,* пусть это будет *c*. Тогда $c \le a$, $c \le a$. Следовательно, $c^2 \le ab < 4ab$, т.е. $c^2-4ab<0$. Поскольку дискриминант отрицателен, уравнение корней не имеет.

Что и требовалось доказать.

8.4 Шестиугольник ABCDEF – правильный. M – середина диагонали AC, а N – середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM – равносторонний.

Решение:

См. рисунок



Имеются простые вычислительные решения.

Приведем геометрическое решение. Углы *FDC, ACD* и *EMC* – прямые. Ясно, что *FN=CN*. В трапеции *EDCM* средняя линия *NK* является высотой. Значит, этот треугольник равнобедренный: *MN=CN*. Тем самым доказано, что FN=MN.

Далее достаточно показать, что в равнобедренном треугольнике FNM угол при вершине *N* равен 60^o. Пусть угол *FNE* равен *α*. Тогда угол *CND* также равен *α*. Так как угол *NDC* равен 120^o, то в треугольнике *NCD* угол

NCD равен 180° – 120°– α = 60° – α. Тогда угол KCN равен 90°– (60° – α) = $30^{\circ}+\alpha$. Из равнобедренного треугольника MNC находим, что угол MNC равен 180° – $2(30^{\circ}+\alpha)$ = 120° – 2α. Теперь, учитывая, что угол END – развернутый, получаем, что угол FNM равен $180^{o}-\angle FNE-\angle MNC-$
$-\angle CND=180^{o}-\alpha-\left(120^{o}-2\alpha\right)-\alpha=60^{o}$.

8.5 Существуют ли натуральные числа p и q, что при всех натуральных k (начиная с некоторого) число k^3+pk+q является квадратом натурального числа?

Решение:

Утверждается, что любой кубический трехчлен $f(x)=x^3+px+q$ с натуральными коэффициентами не может при всех натуральных $x=k$ (даже если ограничиться значениями k, превосходящими некоторую границу) принимать значения только во множестве точных квадратов.

Докажем, например, что значения $f(n^2), n\in N$ достаточно большого $n\in N$ попадают в «зазор» между двумя последовательными точными квадратами, и, следовательно, значение $f(n^2)$ само не может быть точным квадратом.

Имеем: $f(n^2)=\left(n^2\right)^3+pn^2+q=\left(n^3\right)^2+pn^2+q$. Отсюда видно, $f(n^2)>\left(n^3\right)^2$. Покажем, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $f(n^2)<\left(n^3+1\right)^2$. Последнее неравенство в развернутой форме выглядит так: $n^6+pn^2+q<n^6+2n^3+1$, т.е. $pn^2+q<2n^3+1$. Если брать $n>p, n>q$, то будем иметь $pn^2+q<n\cdot n^3+n\le n^3+n^3=2n^3<2n^3+1$.

Таким образом, $\left(n^3\right)^2<f(n^2)<\left(n^3+1\right)^2$, что и утверждалось.