## 8 класс

**8.1**. Можно ли расставить в таблице 5х5 различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних была равна либо 4, либо 9? (Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее).

Решение:

Можно. Например, по горизонтали соседние числа отличаются на 4, а по вертикали – на 9. Скажем, так:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 |
| 10 | 14 | 18 | 22 | 26 |
| 19 | 23 | 27 | 31 | 35 |
| 28 | 32 | 36 | 40 | 44 |
| 37 | 41 | 45 | 49 | 53 |

**Ответ:** Можно. Пример см. выше.

**8.2**. В классе учатся мальчики и девочки. Средний вес мальчиков равен 42 кг, девочек – 27 кг, а всех школьников – 35,5 кг. Докажите, что число мальчиков делится на 17.

Решение:

Пусть m – количество мальчиков, d – количество девочек, M – общий (суммарный) вес мальчиков, D – общий вес девочек. По условию:

$\frac{M}{m} = 42$, $\frac{D}{d} = 27$, $\frac{M+D}{m+d} = 35{,}5$,

откуда: $M = 42m, D = 27d, (M + D) = \frac{71}{2}(m + d)$.

Поэтому $42m + 27d = \frac{71}{2}(m + d)$,

умножим обе части равенства на 2:

$84m+54d=71m+71d,$

$13m=17d.$

Так как, числа 13 и 17 – простые (и взаимно простые), то $m$ делится на 17.

**Доказано**.

**8.3**. Докажите, что если числа ***a, b, c*** неотрицательны, то

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<1.$$

<u>Решение:</u>

Так как $\frac{c}{c+1}<1$, то:

$$\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{c}{c+1}\cdot\frac{1}{(a+1)(b+1)}<\frac{1}{(a+1)(b+1)}.$$

Далее получаем:

$$\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}=\frac{1}{a+1}.$$

И окончательно:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<\frac{a}{a+1}+\frac{1}{a+1}=1.$$

**Доказано.**

<u>Альтернативный вариант решения задачи **8.3**</u> (предложен участниками олимпиады)

Приведем дроби в правой части исходного неравенства к общему знаменателю и сложим.

$$\frac{a(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{b(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}=$$

$$=\frac{abc+ab+ac+a}{abc+ab+ac+a++bc+b+c+1}+\frac{bc+b}{abc+ab+ac+a++bc+b+c+1}+$$

$$+\frac{c}{abc+ab+ac+a++bc+b+c+1}=\frac{abc+ab+ac+a++bc+b+c}{abc+ab+ac+a++bc+b+c+1}.$$

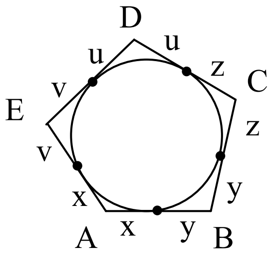
Так как знаменатель на единицу меньше числителя, вся дробь меньше единицы, что и требовалось доказать.

**Доказано.**

**8.4**. Стороны выпуклого пятиугольника последовательно равны 4, 6, 8, 7 и 9. Докажите, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.

Решение:

См. рисунок. Допустим, что можно вписать. AB=4, BC=6, CD=8, DE=7, EA=9.




Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны (см. обозначения на рисунке).

Из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ y+z=6, \\ z+u=8, \\ u+v=7, \\ v+x=9. \end{cases}$$

Складывая все уравнения, имеем $2(x+y+z+u+v)=34$, откуда: $x+y+z+u+v=17$.

Складывая первое, третье и пятое уравнения в системе, получим, $2x+y+z+u+v=21$. Сравнивая два последних равенства, видим, что $x=4$, но тогда из первого уравнения $y=0$ – получили противоречие.

**Доказано.**

**8.5**. Докажите, что любой действительный корень уравнения $x^3+px+q=0$ удовлетворяет неравенству $4qx \le p^2$.

Решение:

Пусть x – корень, т.е., $x^3+px+q=0$.

Умножим на $4x$: $4x^4+4px^2+4qx=0$

Выделим полный квадрат: $(4x^4+4px^2+p^2)-p^2+4qx=0$.

$(2x^2+p)^2-p^2+4qx=0$, т.е. $p^2-4qx=(2x^2+p)^2$

Так как, $(2x^2+p)^2 \ge 0$, то $p^2-4qx \ge 0$, т.е. $4qx \le p^2$.