11 класс

11.1 *Решить систему уравнений*: $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1 \\ 5x^6 - 8x^3 \cdot \sqrt{y} + 2y = 2 \end{cases}$

<u>Решение:</u>

Пусть $u = x^3$, $v = \sqrt{y}$.

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 5u^2 - 8uv = 2v^2 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = u - 1, \\ 5u^2 - 8u(u-1) + 2(u-1)^2 = 2. \end{cases}$$

$$5u^2 - 8u^2 + 8u + 2(u^2 - 2u + 1) = 2$$

$$-u^2 + 4u = 0$$

$u = 0$ или $u = 4$

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 4, \\ v = 3 \end{cases}$$

$$x^3 = 4,$$

$$x = \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{y} = 3,$$

$$y = 9.$$

Ответ: $x = \sqrt[3]{4}$, $y = 9$.

11.2 *Решите неравенство:* $\left| x - 4^{1+\sqrt{3-x}} \right| \le \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$

<u>Решение:</u>

ОДЗ: $x \le 3$

$$x - 4^{1+\sqrt{3-x}} = x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \le 3 - 4 \cdot 1 < 0$$

$$4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} - x \le \frac{5}{3}x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$$

$$8 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \le \frac{8}{3}x$$

$4^{\sqrt{3-x}} \le \frac{1}{3}x$

Согласно ОДЗ $4^{\sqrt{3-x}} \ge 1$, $\frac{1}{3}x \le 1$. Следовательно, равенство возможно, если обе части одновременно равны 1.

$4^{\sqrt{3-x}} = 1$

$\sqrt{3-x} = 0$

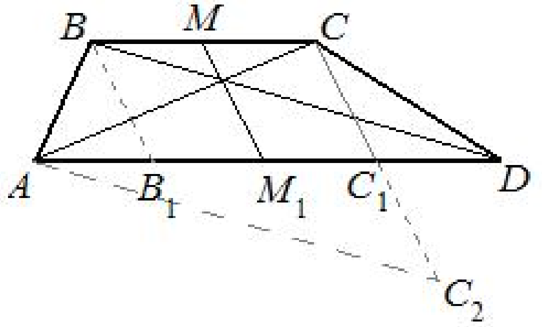
$x = 3$

Ответ: *x=3*.

11.3 ***Площадь трапеции равна 30. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2,5. Одна из диагоналей равна 12. Найдите вторую диагональ трапеции.***

Дано: *ABCD* – трапеция, MM_1 – отрезок соединяющий середины оснований. $MM_1 = 2{,}5$, $AC = 12$.

Найти: *BD*.



Решение:

Пусть длины оснований: *AD* = *a*, *BC* = *b*, *h* – высота трапеции, тогда площадь трапеции $S = 0{,}5(a+b)h = 30$.

Дополнительное построение. $CC_1 \parallel MM_1$. CC_1M_1M – параллелограмм, поэтому $AC_1 = 0{,}5\ (a + b)$. Площадь треугольника ACC_1 равна $S_1 = 0{,}5AC_1h = = 0{,}5 \cdot 0{,}5(a+b)h = 15$. С другой стороны $S_1 = 0{,}5CA \cdot CC_1 \sin\alpha$, где *α* – угол ACC_1. Имеем:

$$0{,}5 \cdot 12 \cdot 2{,}5 \cdot \sin\alpha = 15 \ \Rightarrow\ \sin\alpha = 1 \ \Rightarrow\ AC \perp CC_1.$$

Дополнительные построения. Продолжим прямую CC_1, отложив равные отрезки: $CC_1 = C_1C_2$. Построим $BB_1 \parallel CC_1$. Тогда $\Delta B_1BD = \Delta AC_1C_2$ по двум сторонам и углу между ними: $AC_1 = B_1D = 0{,}5(a+b)$; $BB_1 = C_1C_2$; углы AC_1C_2 и BB_1D равны как накрестлежащие при параллельных BB_1 и CC_2 и секущей *AD*. Поэтому $BD = AC_2$.

В прямоугольном треугольнике ACC_2 катеты $AC = 12$, $CC_2 = 5$. По теореме Пифагора: $AC_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

Ответ: $BD = 13$.

11.4 ***Найдите все значения а , при которых уравнение:*** $\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+3}}=a$ ***имеет единственное решение.***

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2\ \ +3}}\cdot D(f)=R$,так как $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2>0\cdot$

Смысл задачи: выяснить, какие значения эта функция принимает ровно один раз.

Исследуем поведение функции. Имеем

$$f^{/}(x)=\frac{2\sqrt{x^2+2x+3}-(2x+4)\cdot\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}}}{x^2+2x+3}=\frac{2(x^2+2x+3)-(2x+4)\cdot(x+1)}{(x^2+2x+3)^{3/2}}=$$

$$=\frac{-2x+2}{(x^2+2x+3)^{3/2}}$$

Производная $f^{/}(x)$ положительна на интервале (- ∞ ,1) и отрицательна на интервале (1,+ ∞). Поэтому функция $f^{/}(x)$ возрастает на интервале (- ∞ ,1) и убывает на интервале(1,+ ∞). При этом $f(1)=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$.

Кроме того,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{-\dfrac{\sqrt{x^2\ +2x+3}}{|x|}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=2$$

Итак, на промежутке (-∞,1] функция *f(x)*, возрастая, принимает значения от –2 (не включая -2) до $\sqrt{6}$, а на промежутке [1,+∞) функция *f(x),*убывает от значения $\sqrt{6}$ до значения 2(не включая 2).

Поэтому числа из промежутка (-2;2] как значения функции *f(x)* являются однократными значениями. Также однократным является максимальное значение функции – число $\sqrt{6}$. Значение же из промежутка (2; $\sqrt{6}$) функция принимает дважды. Никаких других значений у функции нет.

Ответ: $a=\sqrt{6}$, а Є (-2;2).

11.5 ***n-натуральное число. Первая цифра числа 5^n совпадает с первой цифрой числа 2^n. Какая эта цифра?***

Решение:

Пусть a первая цифра числа 5^n,k-число цифр, следующих за этой первой цифрой.

Имеем: $a \cdot 10^k \prec 5^n \prec (a+1) \cdot 10^k$

Аналогично: $a \cdot 10^L \prec 2^n \prec (a+1) \cdot 10^L$

Перемножим неравенства, получим:

$a^2 \cdot 10^{k+L} \prec 10^n \prec (a+1)^2 \cdot 10^{k+L}$,

$a^2 \prec 10^{n-k-L} \prec (a+1)^2$

Таким образом, между a^2 и $(a+1)^2$содержится целая степень числа 10. Это означает, что a=3.

Ответ: 3