11 класс

11.1. Решите систему уравнений в положительных числах

$$\begin{cases} x^2+5x-2y=2, \\ 2y^2+x+2y=1. \end{cases}$$

Решение:

Имеем: $x^2+5x-2y=2(2y^2+x+2y)$, т.е.

$x^2-4y^2+3x-6y=0,$

$(x-2y)(x+2y)+3(x-2y)=0,$

$(x-2y)(x+2y+3)=0.$

Стало быть, если положительные x и y удовлетворяют системе, то неизбежно $x=2y$.

Далее можно найти x и y подстановкой в условие задачи.

Ответ: $x=\sqrt{6}-2, y=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$.

11.2. Докажите, что если $x>0$, то $x^2+x\geq 1-\dfrac{5}{27x}$

Решение:

Преобразуя исходное неравенство, получим:

$f(x)=x^3+x^2-x-\dfrac{5}{27}\geq 0 \;\; (x>0).$

Найдем производную функции:

$f'(x)=3x^2+2x-1.$

Стационарные точки функции (точки, в которых производная равна нулю): $x=-1,\; x=\dfrac{1}{3}$.

Для $x>0$: $f'(x)<0$ при $x\in(0;\dfrac{1}{3})$ и $f'(x)>0$ при $x>\dfrac{1}{3}$.

Значит, функция $f(x)$ при $x>0$ принимает наименьшее значение при $x=\dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$f(x)>f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{5}{27}=0.$$

Доказано.

11.3. На координатной плоскости расположен квадрат со стороной 2 и центром в точке С (0; 2). Докажите, что при любом расположении квадрата он не имеет общих точек с параболой $y=\frac{4}{5}x^2$.

Решение:

Опишем вокруг квадрата окружность. Ее центр - точка С (0;2), радиус окружности при этом равен $\sqrt{2}$. Достаточно доказать, что ни одна точка образованного круга не лежит на параболе $y=\frac{4}{5}x^2$. Для этого докажем, что расстояние от точки С до любой точки параболы больше $\sqrt{2}$. Возьмем произвольную точку Т параболы:$\left(x;\frac{4}{5}x^2\right)$. Пусть $d(x)$- расстояние между С и Т, имеем

$$d^2(x)=(x-0)^2+\left(\frac{4}{5}x^2-2\right)^2.$$

Для удобства примем $x^2=t$.

Докажем, что $f(t)=t+\left(\frac{4}{5}t-2\right)^2>2$ при всех t.

Выполнив преобразования, получим: $f(t)-2=\frac{16}{25}t^2-\frac{11}{5}t+2.$

В правой части имеем квадратное уравнение. Вычислим его дискриминант:

$$D=\left(\frac{11}{5}\right)^2-4\cdot\frac{16}{25}\cdot 2=\frac{121}{25}-\frac{128}{25}<0.$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, значит, $f(t)-2>0$ при всех t, т.е. $f(t)>2$, **что и требовалось доказать**.

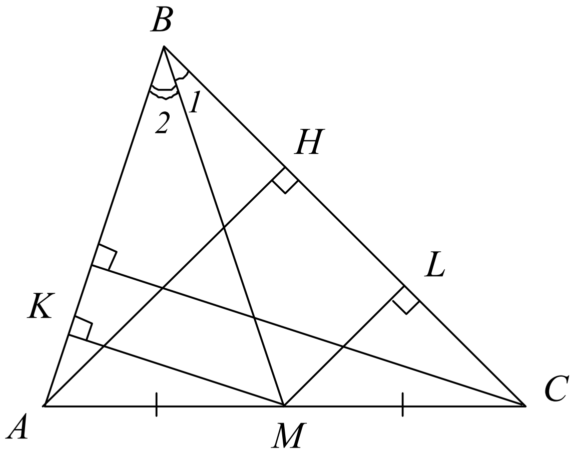
11.4. В остроугольном треугольнике АВС наибольшая из высот АН равна медиане ВМ. Докажите, что угол АВС не больше 60°.

Решение:

См. рисунок.

Дополнительное построение: $MK\perp AB,\ ML\perp BC$, тогда $ML=\frac{1}{2}AH$, т.к. ML – средняя линия треугольника ACH.

Из $\Delta MLB:\ \sin\angle 1=\dfrac{ML}{MB}=\dfrac{\frac{1}{2}AH}{MB}=\dfrac{1}{2},\quad \angle 1=30^\circ$.



Из $\Delta MKB:\ \sin\angle 2=\dfrac{MK}{MB}$, но MK составляет половину высоты ΔABC, проведенной из C, т.е. не больше половины самой большой высоты AH, поэтому $\sin\angle 2\le\dfrac{\frac{1}{2}AH}{MB}=\dfrac{1}{2}$. Получаем $\angle 2\le 30°$.

В итоге, $\angle ABC=\angle 1+\angle 2\le 30°+30°=60°$, **что и требовалось доказать.**

11.5 Докажите, что если m и n – натуральные числа, то $\left|4^m-7^n\right|\ge 3$**.**

<u>Решение:</u>

Достаточно доказать, что $\left|4^m-7^n\right|\ne 1$.

В самом деле, т.к. число $\left|4^m-7^n\right|$ нечетно, будем иметь неравенство $\left|4^m-7^n\right|\ge 3$. Если $\left|4^m-7^n\right|=1$, то $7^n=4^m-1$, но это невозможно, т.к. 4^m-1 делится на $4-1=3$.

Если $\left|4^m-7^n\right|=-1$, то $4^m=7^n-1$, но это невозможно, т.к. 7^n-1 делится на $7-1=6$.

Примечание. Говоря о делимости, можно опираться, например, на формулу $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$.