11 класс

11.1 ***Решить систему уравнений*** $\begin{cases}\sqrt{x+4y}+\sqrt{x+15}=7\\ \sqrt{4y-7}+2=\sqrt{x+4y}\end{cases}$**.**

<u>Решение:</u>

Область определения функции:

$x+4y\ge 0,$

$x+15\ge 0,$

$4y-7\ge 0.$

Обозначим:

$\sqrt{x+15}=u,\ u\ge 0,$

$\sqrt{4y-7}=v,\ v\ge 0.$

Откуда следует:

$$\begin{cases}x+15=u^2,\\ 4y-7=v^2.\end{cases}$$

Сложим эти два уравнения:

$x+4y+8=u^2+v^2,$

$x+4y=u^2+v^2-8.$

$\sqrt{x+4y}=\sqrt{u^2+v^2-8.}$

Перепишем исходную систему в новых обозначениях:

$$\begin{cases}\sqrt{u^2+v^2-8}+u=7,\\ v+2=\sqrt{u^2+v^2-8}.\end{cases}$$

Выразим в обоих уравнениях $\sqrt{u^2+v^2-8}$ и приравняем: $7-u=v+2.$ Откуда $v=5-u.$

$$\begin{cases}v=5-u,\\ \sqrt{u^2+v^2-8}=7-u.\end{cases}$$

Подставим v во второе уравнение системы и возведем в квадрат обе части равенства:

$u^2+25-10u+u^2-8=49-14u+u^2,$

$u^2+4u-32=0.$

Решая последнее уравнение, находим корни:

$u_1=-8<0$ *(корень не подходит)*; $u_2=4$, $v_2=1.$

Находим $x,\ y$: $x=u^2-15=16-15=1,\ y=\dfrac{v^2+7}{4}=\dfrac{1+7}{4}=2.$

Ответ: (1; 2).

11.2 ***Квадратная функция f(x)=ax²+bx+c, a>0, имеет два нуля на промежутке (0;1). Докажите, что f(x)>-a/4 при всех значениях x.***

Решение:

Условие задачи означает, что

$D = b^2 - 4ac > 0$ и $0 < x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} < x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} < 1$.

Поэтому $1 > x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$ и, значит, $D < a^2$.

Рассмотрим дискриминант D_1 квадратного трехчлена

$f(x) + a/4 = ax^2 + bx + c + a/4$:

$D_1 = b^2 - 4a(c + a/4) = D - a^2 < 0$.

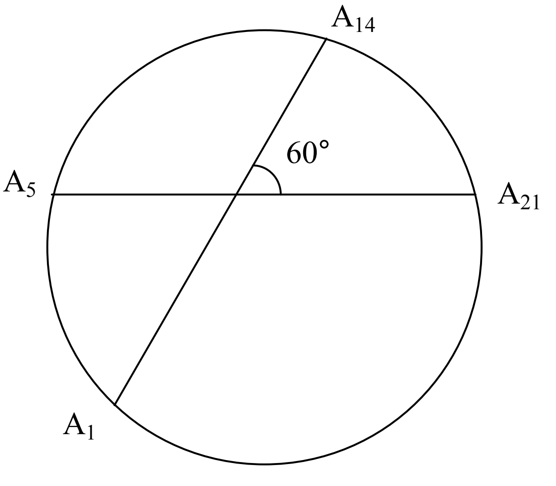
Таким образом, дискриминант трехчлена f(x) + a/4 отрицателен, а старший коэффициент a - положителен. Следовательно, этот трехчлен принимает только положительные значения: f(x) + a/4 > 0, т.е. f(x) > - a/4 при всех x.

11.3 ***В правильном многоугольнике $A_1A_2\ldots A_n$ угол между диагоналями A_1A_{14} и A_5A_{21} равен 60°. Найдите n.***

Решение:

Удобно воспользоваться описанной около многоугольника окружностью. Угол между диагоналями – это угол между хордами; градусная мера этого угла равна полусумме градусных мер соответствующих дуг:

$60^\circ = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1A_5} + \overset{\frown}{A_{14}A_{21}})$, см. рис.



Так как многоугольник правильный, то дуга между соседними вершинами содержит 360°/n. Следовательно, $\overset{\frown}{A_1A_5} = 4 \cdot 360^\circ/n$, $\overset{\frown}{A_{14}A_{21}} = 7 \cdot 360^\circ/n$.

Поэтому 60° = ½ (4*360°/n + 7*360°/n) = 11*180°/n , откуда n = 33.

Замечание. Второй, априори возможный, случай, когда не угол A_1PA_5, а угол A_5PA_{14} равен 60°, в действительности невозможен: тогда бы в наших равенствах вместо 60° участвовал бы угол 120° и мы имели бы 120° = 11*180°/n , 2n = 33.

11.4 ***Найдите множество значений функции $f(x) = \sin^2 2x + \cos^2 x$***

Решение:

Имеем:

$F(x) = \sin^2 2x + \cos^2 x = 1 - \cos^2 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = -\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + 3/2$

Поэтому множество значений функций f(x) совпадает с множеством значений функции $\varphi(t) = -t^2 + \frac{1}{2} t + 3/2$ при $t \in [-1; 1]$. $t_0 = \frac{1}{4}$ - точка максимума функции φ, минимум функция получит на одном из концов отрезка [-1; 1]. Вычисляем:

$\varphi(1/4) = -1/16 + 1/8 + 3/2 = 25/16$,

$\varphi(-1) = -1 - \frac{1}{2} + 3/2 = 0$,

$\varphi(1) = -1 + \frac{1}{2} + 3/2 = 1$.

Ответ: E(f) = [0 , 25/16]

11.5 ***Дано уравнение $*x^2 + *x + * = 0$. Первый из двух игроков заменяет любые две звездочки данного уравнения числами, отличными от нуля. Затем второй игрок заменяет числом оставшуюся звездочку. Первый игрок выигрывает, если полученное уравнение будет иметь хотя бы один корень, по абсолютной величине больший 2010, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто из игроков гарантированно сумеет добиться победы? Опишите стратегию победителя.***

Решение:

1. Перепишем данное уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$. Для того, чтобы уравнение гарантированно имело действительные корни необходимо и достаточно, чтобы *a* и *c* имели разные знаки. Следовательно, первый игрок первым ходом должен заменить *a* и *c* числами с разными знаками.

2. Пусть $\underline{a = 1}$, тогда $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$.

3. Предположим, что второй игрок выигрывает, тогда

$$\begin{cases} \left|\frac{-b-\sqrt{D}}{2}\right| \le 2010, \\ \left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2}\right| \le 2010; \end{cases} \quad \begin{cases} -4020 \le -b-\sqrt{D} \le 4020, \\ -4020 \le -b+\sqrt{D} \le 4020; \end{cases} \quad \begin{cases} -4020-\sqrt{D} \le b \le 4020-\sqrt{D}, \\ -4020+\sqrt{D} \le b \le 4020+\sqrt{D}. \end{cases}$$

4. Полученная система не будет иметь решения (а следовательно, второй игрок не сможет победить) в том случае, когда

$4020 - \sqrt{D} < -4020 + \sqrt{D}$;

$8040 < 2\sqrt{D}$;

$D > 4020^2$.

5. Значение *c* должно быть отрицательным и удовлетворять условиям: $b^2 - 4c > 4020^2$; $-c > \frac{4020^2 - b^2}{4}$; $\underline{-c > 2010^2}$ и при любом значении *b* условие выполняется.

Ответ: выигрывает первый игрок.