11 класс

11.1 Докажите, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $tgx + tg2x < 0$, то $tg3x < 0$.

<u>Решение:</u>

$$tgx + tg2x = tgx + \frac{2tgx}{1-tg^2x} = tgx\left(1 + \frac{2}{1-tg^2x}\right) = tgx\frac{3-tg^2x}{1-tg^2x}.$$

Так как $tgx > 0$, то неравенство $tgx + tg2x < 0$ означает, что $tgx\frac{3-tg^2x}{1-tg^2x} < 0$, т.е $1 < tg^2x < 3$, т.е. $1 < tgx < \sqrt{3}$, т.е $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$.

Но тогда $\frac{3\pi}{4} < 3x < \pi$. Следовательно $tg3x < 0$.

Что и требовалось доказать.

11.2 Докажите, что уравнение $201^x + 2\cdot 3^x = 2013^y$ не имеет решения в натуральных числах ***x*** и ***y***.

<u>Решение:</u>

Пусть $x, y \in N$ и таковы, что $201^x + 2\cdot 3^x = 2013^y$.

Ясно, что $x > y$ (формально: если бы $x \le y$, то $2013^y = 201^x + 2\cdot 3^x < 201^x + 2\cdot 201^x = 3\cdot 201^x \le 3\cdot 201^y$, откуда $3 > \left(\frac{2013}{201}\right)^y > 10^y$, что невозможно).

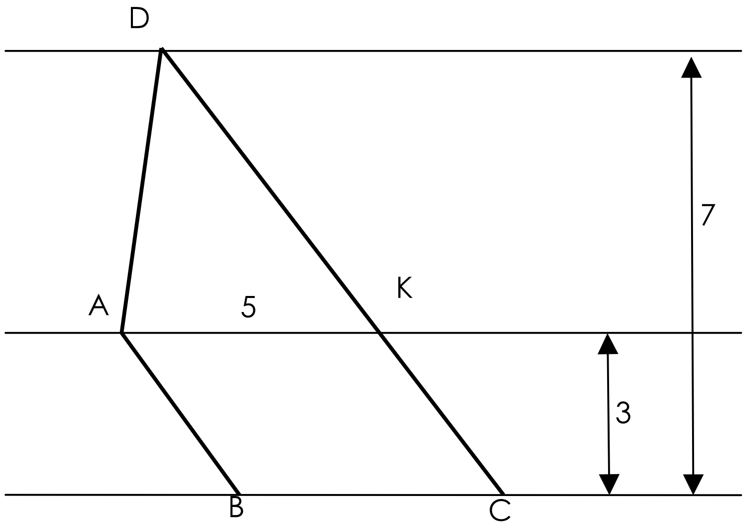
Так как $201 = 3\cdot 67$, $2013 = 3\cdot 671$, то $3^x\cdot 67^x + 2\cdot 3^x = 3^y\cdot 671^y$, $3^x\left(67^x + 2\right) = 3^y\cdot 671^y$, откуда $3^{x-y}\left(67^x+2\right) = 671^y$.

Левая часть последнего равенства делится на 3, а правая – нет. Получили противоречие.

Утверждение доказано.

11.3 Найдите площадь трапеции ***ABCD*** с боковой стороной ***BC=5***, если расстояния от вершин ***A*** и ***D*** до прямой ***BC*** равны 3 и 7 соответственно.

Решение:



$S_{ABCD} = S_{ABCK} + S_{AKD}$.

ABCK – параллелограмм, $S_{ABCK} = 5 \cdot 3 = 15$, $S_{ADK} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (7-3) = 10$.

Поэтому $S_{ABCD} = 15 + 10 = 25$.

Ответ: 25.

11.4 Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде $n + [\sqrt{n}]$ с натуральным *n*. Здесь ***[a]*** – целая часть числа ***a***, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее ***a***.

Решение:

Пусть k – натуральное число. Найдем сначала все натуральные *n* такие, что $[\sqrt{n}] = k$. Равенство $[\sqrt{n}] = k$ равносильно двойному неравенству $k \le \sqrt{n} < k+1$, т.е. $k^2 \le n < k^2 + 2k + 1$, т.е. $n = k^2 + i$, где $i = 0,1,...,2k$.

Для таких *n* имеем $n + [\sqrt{n}] = k^2 + i + k$. Поэтому выражение $n + [\sqrt{n}]$ принимает значения $k^2 + k$, $k^2 + k + 1, \ldots, k^2 + 3k$.

Рассмотрим теперь *n*, для которых $[\sqrt{n}] = k+1$. Для таких *n* выражение $n + [\sqrt{n}]$ принимает значения $(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 3k + 2$, $k^2 + 3k + 3, \ldots$

Как видно, пропущенными оказываются значения $k^2 + 3k + 1$.

Ответ: числа, которые можно представить соотношением $k^2 + 3k + 1$, где k – натуральное число. То есть, при $k = 1, 2, 3, 4...$, это: 5, 11, 19, 29...

11.5 Сумма неотрицательных чисел ***а***, ***в***, ***с*** равна 1. Докажите неравенство $\frac{1}{1+4a^2}+\frac{1}{1+4b^2}+\frac{1}{1+4c^2}\geq 2$.

<u>Решение:</u>

Для $x\in[0;1]$ верно неравенство $\frac{1}{1+4x^2}\geq 1-x$,

так как $1\geq 1-x(2x-1)^2=1-4x^3+4x^2-x=1+4x^2-x(4x^2+1)=$
$=(1-x)(1+4x^2)$

Поэтому

$$\frac{1}{1+4a^2}+\frac{1}{1+4b^2}+\frac{1}{1+4c^2}\geq 1-a+1-b+1-c=3-(a+b+c)=3-1=2.$$

Что и требовалось доказать.