11 класс

11.1 Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x+y+z+v=7, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=1 \end{cases}$ не имеет решений в положительных числах *x,y,z,v*.

<u>Решение:</u>

Допустим, что решение есть. Складывая уравнения системы, получим $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(v+\frac{1}{v}\right)=8$. Но для любого *a > 0* выполнено неравенство $a+\frac{1}{a}\geq 2$, причем равенство имеет место лишь при *a = 1*. Поэтому $\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+\left(v+\frac{1}{v}\right)\geq 8$ причем равенство наступает лишь в случае, когда *x = 1, y = 1, z = 1, v = 1.* Но тогда $x+y+z+v=4$. Противоречие с первым уравнением системы.

11.2 Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ образована по закону: $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n$ для $n=1,2,3\ldots$ Другая последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ построена по закону: $y_1=3$, $y_{n+1}=y_n^2+y_n$ для $n=1,2,3\ldots$ Найдется ли число, принадлежащее одновременно обеим последовательностям?

<u>Решение:</u>

Заметим, что если последовательность натуральных чисел $t_1, t_2, t_3, \ldots$ образована по закону $t_{n+1}=t_n^2+t_n=t_n(t_n+1)$, $n=1,2,3\ldots$, то наибольшая степень числа 2, на которую делятся члены последовательности, начиная со второго, – одна и та же для всех членов. В самом деле, пусть $t_n=2^\alpha a_n$, где $\alpha\geq 1$, a_n – нечетно. Тогда $t_{n+1}=2^\alpha a_n\left(2^\alpha a_n+1\right)$. Число $a_n\left(2^\alpha a_n+1\right)$ нечетно как произведение нечетных чисел a_n и $2^\alpha a_n+1$. Следовательно, наибольшая степень двойки, на которую делится t_{n+1}, точно такая же, как и для числа t_n.

Теперь решим задачу.

$x_1=1, x_2=2, x_3=6, \ldots$ По доказанному, все члены последовательности $x_2=2, x_3, \ldots$ делятся только на 2, но не на $2^2 = 4$.

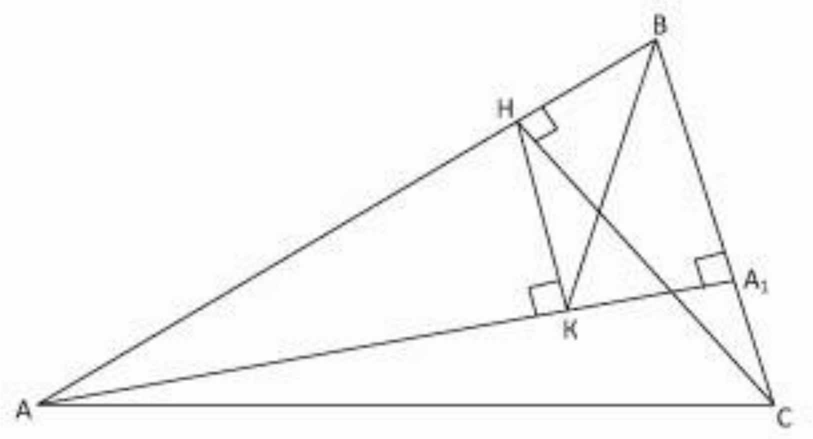
$y_1=3, y_2=12, y_3=156, \ldots$ По доказанному, все члены последовательности $y_2=12, y_3, \ldots$ делятся на 4.

Следовательно, последовательности не пересекаются.

11.3 В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH*. Оказалось, что *AH*=*BC*. Докажите, что биссектриса угла *B*, высота, опущенная из вершины *A*, и прямая, проходящая через точку *H* и параллельная стороне *BC*, пересекаются в одной точке.

Решение:

См. рисунок.



Пусть *K* – точка пересечения высоты AA_1 и прямой, проходящей через точку *H* параллельно *BC*. Докажем что *BK* – биссектриса угла *ABC*.

Треугольник *AKH* равен треугольнику *CHB*: у них равные гипотенузы (*AH*=*BC* по условию) и равные углы ($\angle AHK = \angle HBC$, так как *HK* параллельно *BC*). Поэтому *HK*=*HB*, т.е. треугольник *KHB* – равнобедренный. Значит, $\angle HBK = \angle HKB$. Но $\angle HKB = \angle KBC$ (внутренние накрест лежащие углы при секущей *KB* параллельных прямых *HK* и *BC*). Таким образом, $\angle HBK = \angle KBC$, т.е. *KB* – биссектриса угла *B*, что и требовалось доказать.

11.4 *p*,*q* – целые числа, $|p| \le 100, |q| \le 100$. Докажите, что если $\left| f\left(\sqrt{2}+1\right)\right| < \frac{1}{500}$, где $|f(x)| = x^2 + px + q$, то $p=-2,\ q=-1$ (и, следовательно, $f\left(\sqrt{2}+1\right)=0$).

Решение:

Имеем: $f\left(\sqrt{2}+1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 + p\left(\sqrt{2}+1\right) + q = 3+p+q+(2+p)\sqrt{2}$. Пусть $A = 3+p+q,\ B = 2+p$. *A* и *B* – целые числа.

При этом $|A| \le 3+|p|+|q| \le 3+100+100 = 203$.

По условию $\left|A+B\sqrt{2}\right|<\frac{1}{500}$, т.е. $A+B\sqrt{2}=\varepsilon$, где $|\varepsilon|<\frac{1}{500}$. Находим далее $B\sqrt{2}=-A+\varepsilon$, $2B^2=(-A+\varepsilon)^2=A^2-2A\varepsilon+\varepsilon^2$, $2B^2-A^2=-2A\varepsilon+\varepsilon^2$, откуда $\left|2B^2-A^2\right|\le 2|A||\varepsilon|+\varepsilon^2<2\cdot 203\cdot\frac{1}{500}+\frac{1}{500^2}<1$.

Поскольку $2B^2-A^2$ – целое число и его модуль меньше 1, то это число равно 0: $2B^2-A^2=0$. Последнее равенство с целыми A и B выполняется только, если $A=B=0$ (это легко доказывается и хорошо известно: $A^2=2B^2,\ B\ne 0$, то и $A\ne 0$; пусть $d=HOD(AB)$, тогда $A=da,\ b=db$, где a и b – взаимно просты; имеем $a^2=2b^2$; отсюда следует, что a – четно: $a^2=2a_1$, но тогда $2a_1^2=b^2$, т.е. и b – четно, это противоречит взаимной простоте чисел a и b).

Таким образом, $A=3+p+q=0,\ B=2+p=0$, откуда $p=-2,\ q=-1$.

Следует еще отметить, что для $f(x)=x^2-2x-1$ действительно $f\left(\sqrt{2}+1\right)=0$.

11.5 Функции *s(x) = sin x, c(x) = cos x* удовлетворяют соотношениям $s^2(x)+c^2(x)=1$, $s(2x)=2s(x)c(x)$. Докажите, что не существует функций *s(x)* и *c(x)*, удовлетворяющих соотношениям $s^2(x)+c^2(x)=1$, $s(2x)=s(x)c(x)$ при всех *x* (*s(x)* не равна тождественно нулю). Всё рассматривается в области действительных чисел.

Решение:

Предположим, что такие функции существуют. Тогда $|s(x)|\le 1,\ |c(x)|\le 1$. Более того $|s(x)|=\left|s\left(\frac{x}{2}\right)\right|\left|c\left(\frac{x}{2}\right)\right|$, тогда вытекает, что $s(x)\le\frac{1}{2}\left(s^2\left(\frac{x}{2}\right)+c^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$ (на основании неравенства $ab\le\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$) для $a,b\ge 0$ и $|s(x)|\le\left|s\left(\frac{x}{2}\right)\right|$. Из последнего неравенства заключаем, что последовательность $a_k=\left|s\left(\frac{x}{2^k}\right)\right|$ является неубывающей (при любом фиксированном *x*).

Так как функция *s(x)* не есть тождественный ноль, найдется x_0, для которого $s(x_0)\ne 0$. Пусть $|s(x_0)|=\delta$, тогда $0<\delta\le\frac{1}{2}$. Имеем: $\left|s\left(\frac{x_0}{2^k}\right)\right|\ge\delta$ и

$\left|s\left(\frac{x_0}{2^k}\right)\right| = \sqrt{1-\delta^2}$, $k = 0,1,2\ldots$ Далее, итерируя соотношение $s(x) = s\left(\frac{x}{2}\right)c\left(\frac{x}{2}\right)$, получаем:

$$s(x_0) = s\left(\frac{x_0}{2}\right)c\left(\frac{x_0}{2}\right) = s\left(\frac{x_0}{4}\right)c\left(\frac{x_0}{4}\right)c\left(\frac{x_0}{2}\right) = \ldots = s\left(\frac{x_0}{2^n}\right)c\left(\frac{x_0}{2^n}\right)c\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\ldots c\left(\frac{x_0}{4}\right)c\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Поэтому $\delta = |s(x_0)| = \left|s\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|\left|c\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|\ldots\left|c\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| \le \left|s\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right|\sqrt{1-\delta^2}\ldots\sqrt{1-\delta^2}$, что дает нам равенство $\left|s\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| \ge \frac{\delta}{\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)^n}$ при любом натуральном *n*. Так как положительное число $\tau = \sqrt{1-\delta^2}$ меньше 1, то положительные числа τ^n будут сколько угодно малыми при достаточно больших *n* (точнее, $\lim_{n\to\infty}\tau^n = 0$). В частности, для достаточно больших *n* окажется $\tau^n < \delta$. Но тогда будем иметь $\left|s\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| = \frac{\delta}{\tau^n} > 1$, что противоречит неравенству $|s(x)| \le \frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Замечание: элементарное обоснование малости чисел τ^n можно провести, например, следующим образом. Пусть $s_n = \tau^n + \tau^{n+1} + \ldots + \tau^{2n}$. Так как $\tau^n > \tau^{n+1} > \ldots > \tau^{2n}$, то $s_n > (n+1)\tau^{2n}$. С другой стороны $(1-\tau)s_n = \tau^n - \tau^{n+1} < \tau^n$, $s_n < \frac{\tau^n}{1-\tau}$. Поэтому $(n+1)\tau^{2n} < \frac{\tau^n}{1-\tau}$ и $\tau^n < \frac{1}{1-\tau}\cdot\frac{1}{n+1}$.