## 11 класс

**11.1**. Существует ли такое значение *x*, для которого одновременно выполнены неравенства ***sin x>0,7*** и ***cos x >0,7****?*

Решение:

Возьмем $x_0 = \arcsin 0{,}7$,

тогда $\sin x_0 = 0{,}7$ и $\cos \mathrm{x}_0 = \sqrt{1-\sin^2 x_0} = \sqrt{1-0{,}49} = \sqrt{0{,}51} > 0{,}7$.

Чуть-чуть увеличив $x_0$, получим *x,* для которого *sin x*>0,7 и *co sx*>0,7.

Более аккуратно: возьмем $x_1 = \arcsin 0{,}71$,

тогда $\cos x_1 = \sqrt{1-0{,}71^2} = \sqrt{0{,}4959} > 0{,}7$.

**Ответ:** такие значения *x* существуют.

**11.2**. Многочлен ***M(x)=x⁴+ax³+вx²+cx+d*** с положительными коэффициентами разложен в произведение квадратных трехчленов:

$$\mathrm{M(x)} = (\mathrm{x}^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)$$

Докажите, что $q_1$>0 и $q_2$>0.

Решение:

Если бы было $q_1 < 0$, то квадратный трехчлен $x^2 + p_1x + q_1$ имел бы корни $x_1$ и $x_2$, причем, поскольку $x_1x_2 = q_1 < 0$, корни разного знака. Эти корни были бы корнями многочлена *M(x)*, но из-за того, что коэффициенты *M(x)* положительны, многочлен *M(x)* не может иметь отрицательных корней.

В случае $q_1 = 0$ имели бы нулевой корень, что невозможно для *M(x)*.

**Доказано.**

**11.3**. Докажите, что уравнение $20^x + 12^x = 2012^y$ не имеет решений в натуральных числах *x* и *y*.

Решение:

Пусть $x,\, y \in N$ и $20^x + 12^x = 2012^y$. Так как 20=4·5; 12=4·3, 2012=4·503, то $4^x \cdot 5^x + 4^x \cdot 3^x = 4^y \cdot 503^y$, и $4^x\left(5^x + 3^x\right) = 4^y 503^y$.

Множитель $5^x + 3^x$ всегда чётный, так как слагаемые $5^x$ и $3^x$ всегда нечётные, а их сумма – чётная.

Рассмотрим три случая.

1. Если $x=y$, то уравнение примет вид:

$4^x\left(5^x+3^x\right)=4^x503^x$, откуда имеем: $5^x+3^x=503^x$.

В левой части равенства – чётное слагаемое, в правой – нечётное. В этом случае – решений нет.

2. Если $x \neq y$ и $x>y$.

Пусть $x=y+n$, где $n \in N$.

В таком случае уравнение примет вид:

$4^{y+n}\left(5^{y+n}+3^{y+n}\right)=4^y503^y$, или $4^y \cdot 4^n\left(5^{y+n}+3^{y+n}\right)=4^y503^y$, откуда имеем:

$4^n\left(5^{y+n}+3^{y+n}\right)=503^y$.

В левой части равенства – произведение чётных чисел – чётное число, в правой – нечётное. В этом случае – решений нет.

3. Если $x \neq y$ и $x<y$.

Тогда $20^x+12^x<20^y+12^y$.

В то же время: $2012^y=\left(20\cdot 10^2+12\right)^y=20^y\cdot 10^{2y}+...+12^y>20^y+12^y$.

То есть $20^x+12^x<2012^y$.

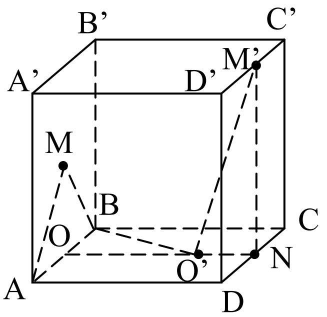
И в этом случае – решений нет.

**Доказано.**

**11. 4**. Ребро куба ***ABCDA\`B\`C\`D\`*** равно 8. найдите радиус сферы, проходящей через вершины ***A*** и ***B***, центр грани ***AA\`B\`B*** и середину ребра ***C\`D\`***.

<u>Решение:</u>

См. рисунок. $AB$=8, M – центр грани *AA'B'B*, *M'* – середина ребра *C'D'*. Требуется найти радиус сферы, проходящей через точки *A,B,M,M'*.




Выясним сначала местоположение центра этой сферы – точки, равноудаленной от *A,B,M,M'*. Геометрическое место точек, равноудаленных от *A,B,M* – прямая, перпендикулярная плоскости *ABM* и проходящая через центр описанной окружности треугольника *AMB*, т.е. через точку *O* (см. рис), поскольку треугольник *AMB* прямоугольный. Стало быть, центр сферы *O'* лежит на этой прямой и равноудален от точек *B* и *M'*. Пусть *O'N*=*x*.

Из соответствующих прямоугольных треугольников находим:

$r^2=O'B^2=OO'^2+OB^2=(8-x)^2+4^2$,

$r^2=O'M'^2=O'N^2+NM'^2=x^2+8^2$.

Поэтому $(8-x)^2+16=x^2+64$, $64-16x+x^2+16=x^2+64$, $x=1$.

Найдем радиус *r*: $r^2=1^2+8^2$, $r=\sqrt{65}$.

**Ответ:** $r=\sqrt{65}$.

**11.5**. Сколько существует последовательностей из семи нулей и трех единиц, в которых никакие две единицы не идут подряд?

Решение:

Все последовательности указанного типа устроены следующим образом: имеется последовательность из семи нулей и восемь позиций, три из которых произвольно занимают единицы (см. схему):

_0_0_0_0_0_0_0_

Возможные позиции для единиц отмечены черточками.

Число вариантов расстановки трех единиц на восьми позициях равно $C_8^3=\dfrac{8!}{3!(8-3)!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=56$.

**Ответ:** 56.