10 класс

10.1 ***Решите систему уравнений:*** $\begin{cases} x+\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}=2 \\ y+\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

Решение:

Умножив первое уравнение системы на y, а второе – на x и, сложив их, получим:

$$y\left(x+\frac{x+2y}{x^2+y^2}\right)+x\left(y+\frac{2x-y}{x^2+y^2}\right)=2y.$$

Откуда следует, что $xy+1=y$, т.е. $y\neq 0$ и $x=1-\dfrac{1}{y}$. (1)

Далее, если первое уравнение системы умножим на x, а второе – на y и вычтем их, то получим:

$$x\left(x+\frac{x+2y}{x^2+y^2}\right)-y\left(y+\frac{2x-y}{x^2+y^2}\right)=2x,$$

откуда $x^2-y^2=2x,$ или $(x-1)^2=y^2$. (2)

Совмещая условия (1) и (2), получим $\dfrac{1}{y^2}=y^2$ или $y^4=1$. Таким образом, возможны лишь два решения системы: $y=1, x=0$ или $y=-1, x=2$.

10.2 ***Существуют ли такие значения переменных x и y, при которых многочлены*** $2x^2-6xy+3y^2$, ***и*** $x^2+4xy-2y^2$ ***принимают одновременно отрицательные значения?***

Решение:

Предположим, что x и y таковы, что

$2x^2-6xy+3y^2<0$, $x^2+4xy-2y^2<0$.

Складывая эти неравенства, получим $3x^2-2xy+y^2<0$, $2x^2+(x-y)^2<0$, что противоречит тому, что $2x^2\geq 0$, $(x-y)^2\geq 0$.

10.3 ***Вычислите сумму*** $\mathbf{2^{2010}-2^{2009}-2^{2008}-\ldots-2^2-2-1}$

Решение:

Так как $2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$, то

$2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008} - 2^{2007} - \dots - 2^2 - 2 - 1 =$

$= (2^{2010} - 2^{2009}) - 2^{2008} - 2^{2007} - \dots - 2^2 - 2 - 1 =$

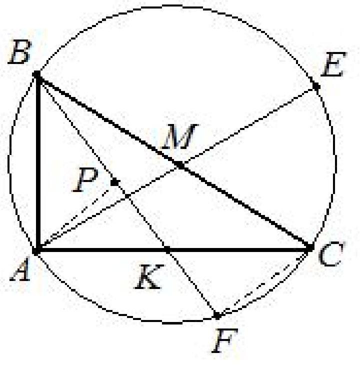
$= (2^{2009} - 2^{2008}) - 2^{2007} - \dots - - 2^2 - 2 - 1 =$

$= 2^{2008} - 2^{2007} - \dots - 2^2 - 2 - 1 = \dots = 2 - 1 = 1.$

10.4 ***Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC, пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно. Найти стороны треугольника ABC, если AE: AM=2:1, BF:BK=3:2, радиус описанной окружности равен*** $\sqrt{5}$**.**

Дано: *AM* и *BK* – медианы треугольника *ABC*. Радиус описанной окружности $r = \sqrt{5}$. $AE : AM = 2 : 1$, $BF : BK = 3 : 2$.

Найти: *AB*, *BC*, *AC*.



Решение:
Диагонали четырехугольника *ABEC* в точке пересечения *M* делятся пополам: $BM = MC$, т.к. *AM* – медиана, $AM = ME$, т.к. $AE : AM = 2 : 1$. Поэтому *ABEC* – параллелограмм. Около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником. Поэтому в треугольнике *ABC* угол *A* прямой, следовательно он опирается на диаметр описанной окружности: $BC = 2r = 2\sqrt{5}$.

Угол *BFC* прямой, т.к. опирается на диаметр *BC*. Пусть точка *P* – середина медианы *BK*, тогда $PK = KF$, т.к. $BF : BK = 3 : 2$. $\Delta APK = \Delta KFC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда угол *APK* прямой. *AP* является высотой и медианой ΔABK, поэтому треугольник равнобедренный: $AB = AK$. Пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$. По теореме Пифагора

$$x^2 + (2x)^2 = \left(2\sqrt{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Получаем: $AB = 2,\ AC = 4$.

Ответ: $BC = 2\sqrt{5}$, $AB = 2,\ AC = 4$.

10.5 ***9 палок длиной по 1м сломали на 17 частей каждую. Докажите, что найдутся три куска, из которых можно сложить треугольник.***

Решение:

Возьмем от каждой палки самый большой кусок. Докажем, что из взятых девяти кусков можно найти три, из которых складывается треугольник.

Сначала заметим, что длина каждого такого куска не меньше 100/17 см. пусть длины этих кусков равны соответственно $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_9$.

Предположим, что треугольник сложить нельзя. Тогда $a_{i+2} \ge a_{i+1} + a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, 7$ (если $a_{i+2} < a_{i+1} + a_i$, то из отрезков a_i , a_{i+1} , a_{i+2} можно сложить треугольник).

Получаем поэтому

$a_9 \ge a_8 + a_7 \ge (a_7 + a_6) + a_7 = 2a_7 + a_6 \ge 2(a_6 + a_5) + a_6 =$

$= 3a_6 + 2a_5 \ge 3(a_5 + a_4) + 2a_5 = 5a_5 + 3a_4 \ge 5(a_4 + a_3) + 3a_4 =$

$= 8a_4 + 5a_3 \ge 8(a_3 + a_2) + 5a_3 = 13a_3 + 8a_2 \ge 13(a_2 + a_1) + 8a_2 =$

$= 21a_2 + 13a_1 \ge 21 \cdot 100/17 + 13 \cdot 100/17 = 200 > 100$.

Но из условия следует $a_9 < 100$.

Противоречие.