10 класс

10.1. Парабола проходит через точки (1;1) и (2;2) и касается оси абсцисс. Найдите координаты точки касания.

Решение:

Условие касания оси абсцисс означает, что уравнение параболы имеет вид $y = a(x - x_0)^2$, где $a \neq 0$, x_0 – абсцисса точки касания. Еще из условия имеем:

$$\begin{cases} a(1-x_0)^2 = 1, \\ a(2-x_0)^2 = 2, \end{cases} \quad \text{что равносильно системе:} \quad \begin{cases} a(1-x_0)^2 = 1, \\ (2-x_0)^2 = 2(1-x_0)^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $x_0 = \pm\sqrt{2}$ (и далее соответствующие значения a).

Ответ: $\pm\sqrt{2}$ **.**

10.2. Докажите или опровергните следующее утверждение: неравенство $x^4 - 2x^2 + |x| \geq 0$ ***справедливо при любых значениях*** x**.**

Решение:

Попробуем доказать, что при некоторых значениях x значение выражения $x^4 - 2x^2 + |x|$ отрицательно. Например, если $x = 0{,}8$, то

$$0{,}8^4 - 2 \cdot 0{,}8^2 + 0{,}8 = 0{,}8(0{,}8^3 - 2 \cdot 0{,}8 + 1) = 0{,}8(0{,}512 - 1{,}6 + 1) < 0.$$

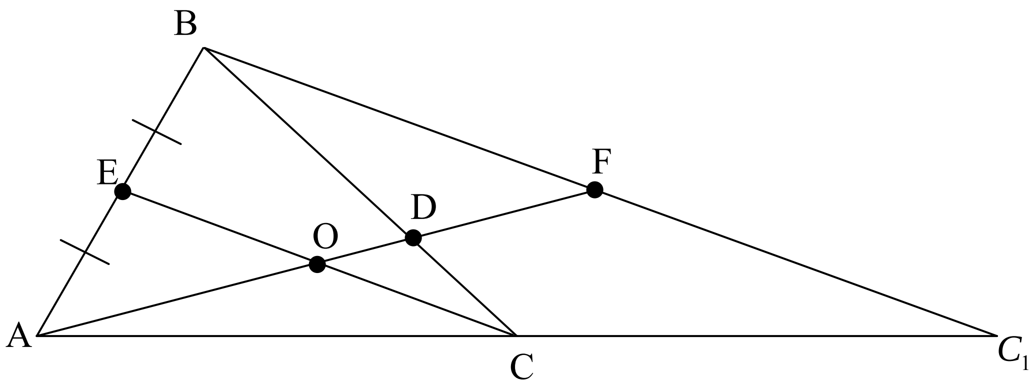
Опровергнуто.

10.3. На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что BD:DC=2:1. В каком отношении отрезок AD делит медиану CE?

Решение:

См. рисунок. Идея решения заключается в следующем.

Сделаем BC медианой. Дополнительные построения: $CC_1 = AC$. Тогда BC - медиана треугольника ABC_1. Тогда D оказывается точкой пересечения медиан треугольника ABC_1 (так как $BD : DC = 2 : 1$). Значит, AF - медиана треугольника ABC_1 и среднюю линию CE этого треугольника она делит пополам: $CO = OE$.



Ответ: отрезок AD делит медиану CE пополам, т.е. в отношении 1:1.

10.4. Число t таково, что разность $\sqrt{2518+t}-\sqrt{2500-t}$ ***равна 6. Чему равна сумма*** $\sqrt{2518+t}+\sqrt{2500-t}$ ***?***

Решение**:**

По условию, $\sqrt{2518+t}-\sqrt{2500-t}=6$ (1)

Пусть $\sqrt{2518+t}+\sqrt{2500-t}=x$ (2)

Возведем равенства (1) и (2) в квадрат и сложим, получим:

$10036=36+x^2$, откуда

$x=100$.

Ответ: 100.

10.5. Можно ли числа 55, 56,…,90, 91 разбить на две группы (не менее двух чисел в каждой) так, чтобы сумма всех чисел одной группы делилась на сумму всех чисел другой группы?

Решение:

Предположим, что это сделать можно.

Пусть V – сумма чисел одной группы, W – сумма чисел другой группы, W делится на V, т.е. $W=mV$, где m – натуральное число. Подсчитаем сумму всех 37 чисел. Получим следующее:

$V+W=73\cdot 37$, где 73 – среднее значение чисел исходной группы;

$V+mV=73\cdot 37$,

$(1+m)V=73\cdot 37$.

Из последнего равенства видно, что V делитель числа $73 \cdot 37$ и $V < 73 \cdot 37$. Но так как числа 37 и 73 – простые, то натуральные делители числа $73 \cdot 37$ – 1, 37, 73, 73*37. В сумму V входят не менее двух чисел, поэтому $55 + 56 = 111 \le V \le 90 + 91 = 181$, так что V не совпадает ни с одним из вариантов. Мы получили противоречие.

Ответ: нельзя.