10 класс

10.1 Найдите все пары чисел x и y, для которых верно равенство $x^3 - 3x^2 - x \cdot y - 8x - 2y + 27 = 0$.

Решение:

Выразим y через x, затем преобразуем дробь, выделив целую часть:

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 8x + 27}{x+2} = x^2 - 5x + 2 + \frac{23}{x+2}.$$

Так как значения переменных целые, то в качестве знаменателя достаточно рассмотреть делители 23.

x+2=1;	x+2=-1;	x+2=23;	x+2=-23;
x=-1;	x=-3;	x=21;	x=-25;
y=31;	y=3;	y=339;	y=751;

Ответ: (-1;31), (-3;3), (21;339), (-25;751).

10.2 ***Докажите неравенство*** $a^n + b^n > (a+b)^n$***, где*** a***, b – действительные числа такие, что*** $ab < 0,$ $a + b > 0,$ ***n – натуральное число, n>1.***

Решение:

Докажем сначала, что $(x+y)^n > x^n + y^n$, если $x > 0, y > 0, n > 1$. Для этого заметим, что из условия $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0, n > 1$ следует $\alpha^n + \beta^n < 1$.

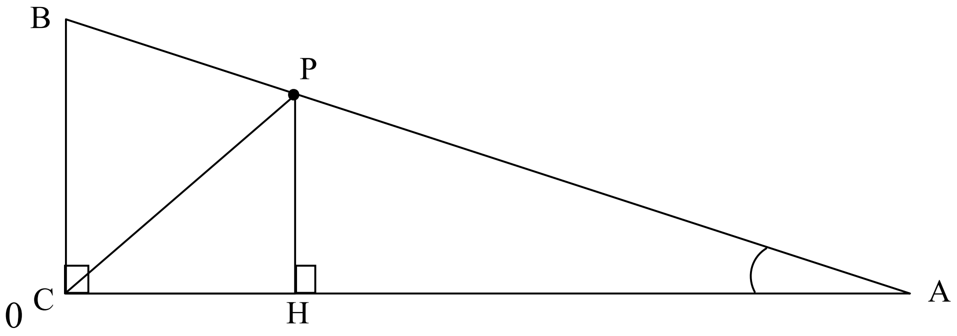
Положив, что в этом неравенстве $\alpha = \dfrac{x}{x+y}, \beta = \dfrac{y}{x+y}$, и умножив обе части на $(x+y)^n$, получим нужное неравенство.

Теперь можем доказать неравенство задачи. Пусть для определенности $a > 0, b < 0$. Поскольку, очевидно, что $a^n + b^n \ge a^n - |b|^n$, то достаточно доказать неравенство $a^n - |b|^n > (a - |b|)^n$. Но оно следует из доказанного выше неравенства, если в нем положить $x = |b|, y = a - |b|$.

10.3 ***Катеты прямоугольного треугольника равны 1 и 3. Внутренняя точка гипотенузы находится на расстоянии 1 от вершины прямого угла. В каком отношении эта точка делит гипотенузу?***

Решение: (одно из многих возможных)

См. рис.



BC = 1
AC = 3
CP = 1

Треугольник PAH подобен треугольнику BAC, пусть к – коэффициент подобия:

AH = к * AC = 3к ,

PH = к * BC = к .

Тогда HC = AC – AH = 3 – 3к .

Далее из прямоугольного треугольника CHP по теореме Пифагора

$PH^2 + HC^2 = CP^2$,

$к^2 + (3-3к)^2 = 1$.

Корни получившегося уравнения: $к_1 = 1$, $к_2 = 4/5$.

Поскольку P – внутренняя точка гипотенузы, корень $к_1 = 1$ нам не подходит. Таким образом, к = 4/5 .

Значит, AP = 4/5 AB , BP = AB – AP = 1/5 AB и BP : PA = 1 :4.

Ответ: 1:4

10.4 ***Найдите все действительные значения*** a***, при которых уравнение*** $a\cdot|x-2|-|x+3|=0$ ***имеет два различных решения.***

Решение:

Решения существуют только при $a \ge 0$, так как $a\cdot|x-2|=|x+3|$. При этом условии возведем обе части уравнения в квадрат $a^2\cdot(x-2)^2=(x+3)^2$,

$(a^2-1)x^2-2(2a^2+3)x+4a-9=0.$ Заметим, что при $(a^2-1)=0$ уравнение становится линейным и не может иметь два корня, следовательно, можем считать, $(a^2-1)\ne 0\ (a\ne 1)$.

Найдем дискриминант уравнения: $D=(2a^2+3)^2-(a^2-1)(4a^2-9)=25a^2$. Решений будет два, если $D>0,$ т.е. $a\ne 0$. Учитывая все полученные ограничения $\begin{cases} a>0, \\ a\ne 1, \\ a\ne 0; \end{cases}$ получаем $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $a\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

10.5 ***На доске написано уравнение*** $x^2+2x\cdot *+3\cdot(*+*)=0$. ***Докажите, что любую тройку попарно различных целых чисел можно так расставить в уравнение вместо *, что полученное уравнение будет иметь по крайней мере один корень.***

Решение:

Пусть n,m и p – произвольная тройка целых чисел. Без ограничения общности можно считать, что n- наибольшее из этих чисел, и кроме этого, m>p. Тогда $m \le n-1$, а $p \le n-2$. В этом случае поставив n вместо самой левой звездочки, а m и p произвольным образом, получим квадратное уравнение $x^2 + 2nx + 3 \cdot (m+p) = 0$ с неотрицательным дискриминантом.

Действительно: $D = n^2 - 3(m+p) \ge n^2 - 3(n-1+n-2) = n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2 \ge 0$.