10 класс

10.1 Можно ли число 3102 представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

Решение:

Пусть $x, y \in N$ и $x^2 - y^2 = 3102$. Тогда число 3102 представляется в виде произведения двух натуральных чисел: $3102 = (x-y)(x+y)$. Так как число 3102 четно, то, по меньшей мере, один из сомножителей $x-y$ и $x+y$ является четным числом. Но числа $x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую четность (т.к. отличаются на четное число: $x+y-(x-y)=2y$). Поэтому каждый сомножитель $x-y$ и $x+y$ четен. Но тогда их произведение $(x-y)(x+y)$ делится на 4, в то время как число 3102 на 4 не делится.

Пришли к противоречию. Таким образом, число 3102 нельзя представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

10.2 Найдите ***x+y***, если $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

Решение:

Умножим равенство $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=1$ на $\left(\sqrt{1+y^2}-y\right)$, получим $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\left(\sqrt{1+y^2}-y\right)$.

Аналогично $\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$..

Сложив два последних равенства, найдем $x+y=0$.

Ответ: $x+y=0$.

10.3 Найдите углы треугольника, в котором медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части.

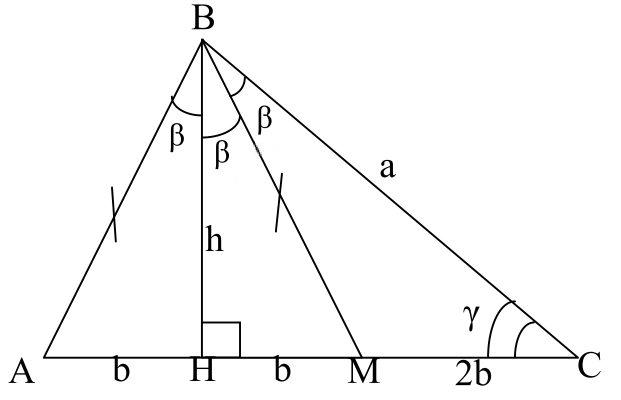
Решение:

Пусть *MC=2b*. Тогда *AM=2b* и *AH=HM=b* (т.к. *ΔAHB=ΔMHB*).

В прямоугольном треугольнике ВНС отрезок ВМ является биссектрисой. По свойству биссектрисы имеем $\frac{BH}{BC}=\frac{HM}{MC}$, т.е. $\frac{h}{a}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$.

Значит, $\sin\gamma=\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$.

Таким образом, $\gamma = 30^o$. Из ΔBHC $2\beta + \gamma = 90^o$, $\beta = 30^o$. Следовательно $\angle B = 3\beta = 90^o$. Наконец, $\angle A = 60^o$.



10.4 Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было $\frac{2}{5}$. Докажите, что во всем классе мальчиков не больше $\frac{4}{7}$.

<u>Решение:</u>

Ведем обозначения: M_1 – число мальчиков, участвовавших только в первом походе, M_2 – только во втором походе, M_{12} – число мальчиков, участвовавших и в первом, и втором походе. Аналогичные обозначения D_1, D_2, D_{12} – для девочек.

По условию для первого похода $M_1 + M_{12} = \frac{2}{5}(M_1 + M_{12} + D_1 + D_{12})$, откуда $3(M_1 + M_{12}) = 2(D_1 + D_{12})$.

Аналогично для второго похода $3(M_2 + M_{12}) = 2(D_2 + D_{12})$.

Сложим два последних равенства:

$3(M_1 + M_2 + 2M_{12}) = 2(D_1 + D_2 + 2D_{12})$.

Максимальная доля мальчиков среди учеников класса имеет место, если:

1) в первый и второй ходили разные мальчики, т.е. никто из мальчиков не ходил в оба похода, т.е. $M_{12} = 0$;

2) все девочки ходили в оба похода, т.е. $D_1 = 0$ и $D_2 = 0$.

Для такого «крайнего» случая имеем:

$3(M_1 + M_2) = 4D_{12}$.

И для этого случая: $M_1 + M_2 = M$ – общее число мальчиков в классе,

D_{12} – общее число девочек в классе.

Если n – число всех учеников класса, то $D = n - M$.

Тогда $3M = 4(n - M)$, откуда $M = \frac{4}{7}n$.

Таким образом, доля мальчиков в классе не может превышать $\frac{4}{7}$.

Доказано.

10.5 $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq 1$.

Решение:

В условиях задачи верно даже более сильное неравенство:

$x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leq (x + y)^2$, т.е. $8x^2y^2 \leq 2xy$. Последнее может быть преобразовано в $4xy \leq 1$.

Справедливость последнего неравенства очевидна для $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x + y \leq 1$.