10 класс

10.1 Найдите какой-нибудь квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, обладающий свойством: при всех x $f(x+1) - f(x) = 3x + 1$.

Решение:

$f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b$.

Запишем тождество $2ax + a + b = 3x + 1$.

Имеем: $\begin{cases} 2a = 3, \\ a + b = 1. \end{cases}$

Решая систему, получим: $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -\dfrac{1}{2}$.

Получаем: $\dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + c = 0$, или: $3x^2 - x + c = 0$. Значение c может быть любым, например, $c=1$.

Таким образом, нам подходит, например, трехчлен $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

10.2 Члены геометрической прогрессии – положительные числа. Известно, что десятый член этой прогрессии меньше 2, тридцатый член больше 3. Докажите, что стодесятый член прогрессии больше 15.

Решение:

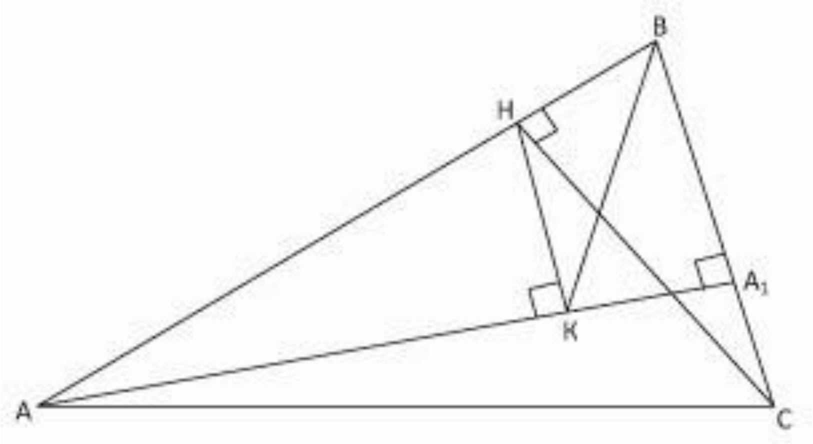
Пусть $b > 0$ – первый член прогрессии, $b > 0$ – знаменатель прогрессии. По условию $b_{10} = bq^9 < 2$, $b_{30} = bq^{29} > 3$. Разделив второе неравенство на первое, найдем $q^{20} > \dfrac{3}{2}$.

Далее получаем $b_{110} = bq^{109} = bq^{29}\left(q^{20}\right)^4 > 3\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = 3 \cdot \dfrac{81}{16} > 3 \cdot 5 = 15$.

Доказано.

10.3 В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Оказалось, что $AH=BC$. Докажите, что биссектриса угла B, высота, опущенная из вершины A, и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC, пересекаются в одной точке.

Решение:
См. рисунок.



Пусть K – точка пересечения высоты AA_1 и прямой, проходящей через точку H параллельно BC. Докажем что BK – биссектриса угла ABC.

Треугольник AKH равен треугольнику CHB: у них равные гипотенузы ($AH=BC$ по условию) и равные углы ($\angle AHK=\angle HBC$, так как HK параллельно BC). Поэтому $HK=HB$, т.е. треугольник KHB – равнобедренный. Значит, $\angle HBK= \angle HKB$. Но $\angle HKB=\angle KBC$ (внутренние накрест лежащие углы при секущей KB параллельных прямых HK и BC). Таким образом, $\angle HBK=\angle KBC$, т.е. KB – биссектриса угла B, что и требовалось доказать.

10.4 Докажите, что если x_0 – корень кубического уравнения $x^3+px+q=0$, то $4x_0q \le p^2$.

Решение:

По условию $x^3+px+q=0$. Рассмотрим квадратное уравнение (при $x_0 \ne 0$) $x_0x^2+px+q=0$. Это уравнение имеет корень $x=x_0$. Стало быть, дискриминант неотрицателен: $p^2-4x_0q \ge 0$, т.е. $4x_0q \le p^2$. Случай $x_0=0$ очевиден.

10.5 Докажите, что любой набор S из n>1 положительных чисел обладает хотя бы одним из следующих свойств:

1) в S найдутся два таких числа a и b, что $a \le b^2$,

2) в S найдутся два таких числа a и b, что $|a-b| < \dfrac{1}{4(n-1)}$.

Решение:

Расположим числа набора S в порядке неубывания:

$0 < c = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_{n-1} = d$.

Если $c \le d^2$, то для чисел $a = x_0$, $b = x_{n-1}$ выполняется свойство 1). Пусть теперь $c > d^2$. Докажем, что в этом случае выполняется свойство 2).

Положим $h_i = x_i - x_{i-1} \ge 0$.

Тогда $d = x_{n-1} = x_0 + h_1 + \ldots + h_{n-1} = c + h_1 + \ldots + h_{n-1}$.

Обозначим $H = h_1 + \ldots + h_{n-1}$. Тогда $d = c + H$. По нашему предположению $c > (c+H)^2$. Так как $(c+H)^2 \ge 4cH$, то $c \ge 4cH$, т.е. $H < \frac{1}{4}$. Таким образом, $h_1 + \ldots + h_{n-1} < \frac{1}{4}$. Следовательно, найдется номер i такой, что $h_i < \frac{1}{4(n-1)}$ (например, возьмем наименьшее h_i). Это означает, что $x_i - x_{i-1} < \frac{1}{4(n-1)}$, т.е. нам подходят $a = x_i$, $b = x_{i-1}$.