10 класс

10.1 Можно ли число 2012 представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

Решение:

Подберем натуральные числа $x>y$ так, чтобы $x^2-y^2=2012$,

т.е. чтобы: $(x-y)(x+y)=2\cdot 1006$.

Попробуем взять $x-y=2$, $x+y=1006$. Найдем $x=504$, $y=502$.

Замечание. Требуемое представление единственно, поскольку разложение числа 2012 на простые имеет вид $2012=2^2\cdot 503$, а числа $x-y$ и $x+y$, имея одинаковую четность и являясь делителями числа 2012, должны быть четными делителями, т.е. неизбежно $x-y=2$, $x+y=2*503$.

Ответ: можно.

10.2 Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, для которого при всех значениях x выполнено неравенство $f(x)\le f(x^2)$?

Решение:

Предположим, что такой квадратный трехчлен существует:

$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$, и $f(x)\le f(x^2)$.

Имеем $ax^2+bx+c \le ax^4+bx^2+c$ при всех x,

т.е. $ax^4-ax^2+bx^2-bx \ge 0$, $ax^2(x^2-1)+bx(x-1) \ge 0$,

и далее $x(x-1)(ax(x+1)+b)\ge 0,\ x(x-1)(ax^2+ax+b)\ge 0$ при всех x.

Утверждается, что трехчлен $q(x)= ax^2+ax+b$ имеет корни $x=0$ и $x=1$. Если бы, например, $q(0)\neq 0$, то в малой окрестности точки 0 трехчлен $q(x)$ имел бы знак числа $q(0)$, в то время как выражение $x(x-1)$ меняет знак при переходе аргумента x через 0 и, следовательно, произведение $x(x-1)q(x)$ меняет знак, что делает невозможным выполнение неравенства $x(x-1)q(x)\ge 0$.

Аналогично, $q(1)=0$. Но $q(x)=b$, $q(1)=2a+b$. Значит, $b=0$, $a=0$. Получено противоречие (ведь $a\neq 0$).

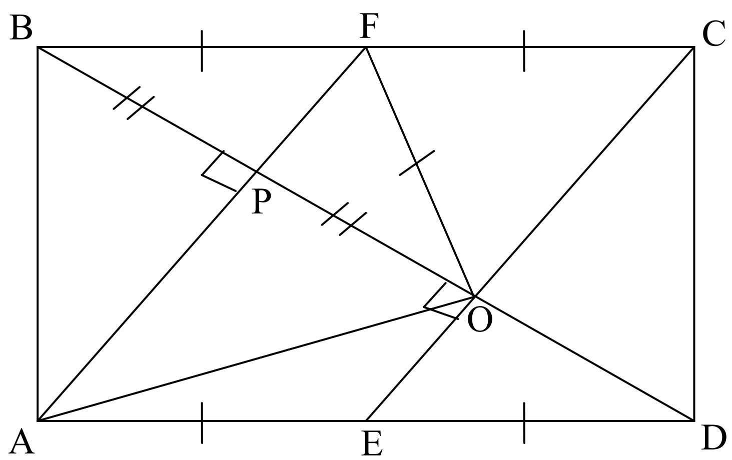
Ответ: не существует.

10.3. В прямоугольнике *ABCD* соединили вершину *C* с серединой *E* стороны *AD*. Оказалось, что *CE* перпендикулярно *BD*. Пусть *O* – точка пересечения *C*Е и *BD*. Докажите, что треугольник *BAO* – равнобедренный.

Решение:

См. рисунок. Пусть *F* – середина *BC*. Тогда *OF*=*BF*, так как медиана *OF* прямоугольного треугольника *BOC* равна половине гипотенузы *BC*.

Кроме того, AF || CE, поэтому AF$\perp$BD. В равнобедренном треугольнике *BFO* отрезок *FP* является высотой, а значит и медианой: *BP*=*PO*. Стало быть, высота *AP* треугольника *BAO* является медианой. Следовательно *AO*=*AB*.



Доказано.

10.4 Докажите, что если 0<a<2? То хотя бы одна из дробей $\frac{a^2}{a+1}$ и $\frac{2-a}{a^2}$ не меньше 0,6 .

Решение:

План действий: сначала выясним при каких значениях *a, 0<a<2*, дробь $\frac{a^2}{a+1}$ не меньше $\frac{3}{5}$, затем проверим, что для остальных значений *a* дробь $\frac{2-a}{a^2}$ больше $\frac{3}{5}$.

Итак, сначала решаем неравенство $\frac{a^2}{a+1} \geq \frac{3}{5}$, т.е. $5a^2$-$3a$-3$\geq$0. Положительный корень трехчлена равен $\frac{3+\sqrt{69}}{10} = \frac{3+8,...}{10} = 1,1...$

Таким образом, неравенство $\frac{a^2}{a+1} \geq \frac{3}{5}$ выполняется для $a \in \left[\frac{3+\sqrt{69}}{10}; 2\right)$.

Пусть теперь $a < \frac{3+\sqrt{69}}{10}$. Проверим, что $\frac{2-a}{a^2} > \frac{3}{5}$,
т.е. что $3a^2+5a-10 < 0$.

Решая последнее неравенство, находим $a < \frac{\sqrt{145}-5}{6}$. Теперь нам достаточно проверить, что $\frac{\sqrt{145}-5}{6} > \frac{3+\sqrt{69}}{10}$, т.е. $5\sqrt{145} > 34 + 3\sqrt{69}$.

Это можно сделать, например, так: $\sqrt{145} > 12$, $\sqrt{69} < 8 + \frac{1}{3}$, т.к. $69<64+16/3+1/9$.

Поэтому $5\sqrt{145} > 5 \cdot 12 > 34 + 3 \cdot \left(8 + \frac{1}{3}\right) > 34 + 3\sqrt{69}$.

Доказано.

10.5 Могут ли числа 7,8 и 9 быть не обязательно соседними членами одной геометрической прогрессии?

Решение:

Предположим, что $bq^k=7$, $bq^l=8$, $bq^m=9$ (где b-первый член прогрессии, q – ее знаменатель; k, l, m – целые числа ≥ 0). Тогда $q^s = \frac{8}{7}$, где $s=l-k\neq 0$, $q^t = \frac{9}{8}$, где $t=m-l \neq 0$.

Имеем: $q^{st} = \left(\frac{8}{7}\right)^t$, и $q^{ts} = \left(\frac{9}{8}\right)^s$, т.е. $\left(\frac{8}{7}\right)^t = \left(\frac{9}{8}\right)^s$, $8^{s+t} = 7^t \cdot 9^s$. Это равенство не возможно при целых $s\neq 0$ и $t\neq 0$ (независимо от знака чисел s, t и $s+t$).

Ответ: не могут.