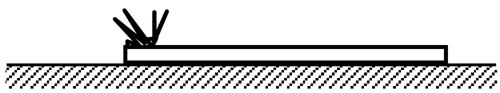
9 класс



Задача 1. С какой минимальной скоростью должен прыгнуть кузнец, находящийся на одном конце соломинки, что бы попасть на другой? Соломинка имеет массу **M**, длину **L** и находится на гладкой горизонтальной поверхности. Масса кузнеца **m**.

Решение

Из закона сохранения импульса в проекции на ось X:

$$mv_{0x} = Mu,$$

откуда $$u = \frac{M}{m} v_{0x}. \qquad (1)$$

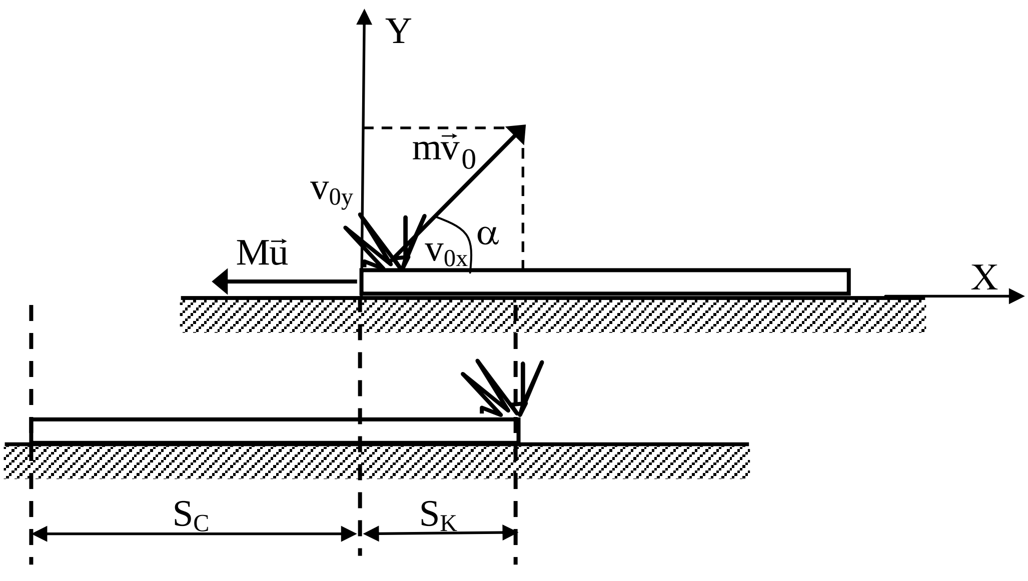
Наименьшая скорость будет при $\alpha = 45^0$, т к. при этом угле имеет место наибольшая дальность полёта.

В верхней точке $v_y = 0$, поэтому

$$v_{0y} = gt' = g\frac{t}{2},$$

где t' - время подъёма кузнеца, а время полёта:

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}. \qquad (2)$$



Из рисунка и из (1) и (2) следует:

$$\ell = S_C + S_K = ut + v_{0x}t = t(\frac{m}{M}v_{0x} + v_{0x}) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\left(\frac{m+M}{M}\right),$$ или

$$v_{0x}v_{0y} = \frac{\ell g}{2}\left(\frac{M}{m+M}\right).$$

Однако, $v_{0x} = v_{0y}$ ($\alpha = 45^0$), поэтому $v_0 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2} = \sqrt{2}v_{0x}$.

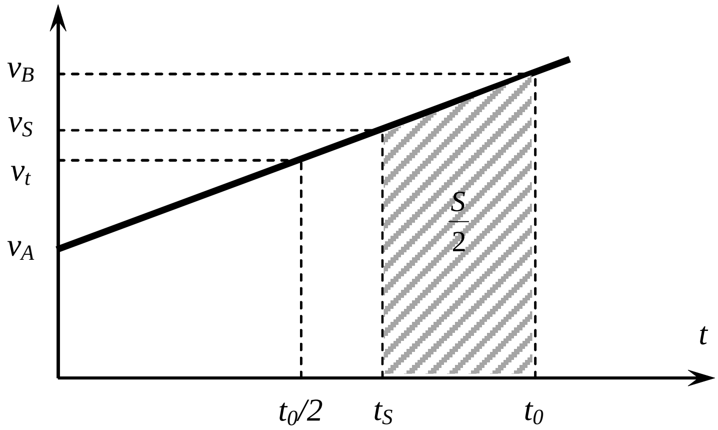
Окончательно получаем: $v_0 = \sqrt{\left(\dfrac{\ell g M}{m+M}\right)}$

Ответ: $v_0 = \sqrt{\left(\dfrac{\ell g M}{m+M}\right)}$.

Задача 2. На прямолинейном участке пути *AB* тело двигалось с постоянным ускорением. В начале пути скорость равнялась $\mathbf{v_A}$, в конце $\mathbf{v_B}$. Найдите скорость $\mathbf{v_S}$ в середине пути. Сравните её со скоростью $\mathbf{v_t}$, которую тело имело спустя ровно половину времени своего движения по участку *AB*. Какая из этих скоростей больше, $\mathbf{v_S}$ или $\mathbf{v_t}$? Ответ обоснуйте.

Решение

См. рисунок.



Так как тело движется равноускоренно то $\mathbf{v_t}$ представляет собой среднюю скорость на всем участке движения. Следовательно:

$$v_t = \frac{v_A + v_B}{2}.$$

При этом ускорение тела равно:

$$a = \frac{v_B - v_A}{t_0}.$$

Обозначим t_S – время, за которое тело прошло первую половину пути. Согласно формуле величины пути при равноускоренном движении первая половина пути, пройденного телом, равна:

$$\frac{S}{2} = v_A \cdot t_S + \frac{a t_S^2}{2}. \qquad (1)$$

Время, за которое тело прошло половину пути, можно представить как:

$$t_S = \frac{v_S - v_A}{a}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$\frac{S}{2} = \frac{v_S^2 - v_A^2}{2a}. \tag{3}$$

Аналогично для второй половины пути:

$$\frac{S}{2} = \frac{v_B^2 - v_S^2}{2a}. \tag{4}$$

Приравнивая правые части равенств (3) и (4), получим:

$$v_S = \sqrt{\frac{v_A^2 + v_B^2}{2}}.$$

Теперь необходимо доказать, что $v_S \ge v_t$. Это видно из графика, приведенного на рисунке. Это же неравенство можно доказать и аналитически.

По условию задачи $v_S > 0$ и $v_t > 0$. В этом случае доказательство неравенства $v_S \ge v_t$ эквивалентно доказательству неравенства $v_S^2 - v_t^2 \ge 0$.

$$v_S^2 - v_t^2 = \frac{v_A^2 + v_B^2}{2} - \frac{(v_A + v_B)^2}{4} = \frac{2v_A^2 + 2v_B^2 - v_A^2 - 2v_A v_B - v_B^2}{4} = \frac{v_A^2 - 2v_A v_B + v_B^2}{4} =$$

$$= \frac{(v_A - v_B)^2}{4} \ge 0.$$

Доказано.

Ответ: $v_t = \dfrac{v_A + v_B}{2}$, $v_S = \sqrt{\dfrac{v_A^2 + v_B^2}{2}}$, $v_S \ge v_t$.

Задача 3. Экспериментатор Глюк склеил четыре кирпича и получил кирпичный «колодец», который он приклеил ко дну стеклянного сосуда прямоугольной формы. Площадь дна сосуда S_0 = 540 см^2. Затем Глюк начал наливать воду из шланга, опущенного в сосуд между его стенкой и кирпичным «колодцем» (рисунок 1). Вода из шланга вытекала с постоянной скоростью. График исследованной Глюком зависимости уровня воды h в сосуде от времени представлен на рисунке 2. Время t = 0 соответствует началу поступления воды в сосуд. По результатам исследования Глюк определил длину B, ширину C, толщину A и объем каждого кирпича. Каковы их значения?

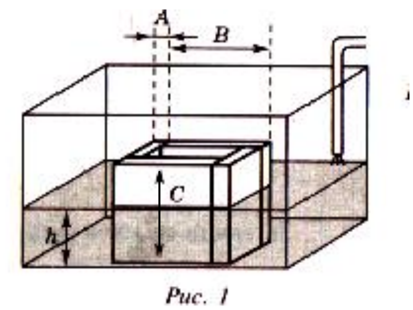


Рис. 1

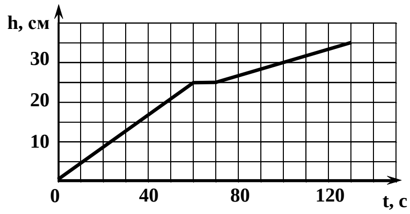


Рис. 2

Решение

1. Участок от 0 до 60 с соответствует заполнению водой пространства между стенками сосуда и кирпичами. Объем наливаемой воды равен:

$$V = hS = h(S_0 - S_1),$$

где $S_1 = (A+B)^2$.

2. В течение следующих 10 с заполняется внутренняя полость «колодца», и высота уровня в сосуде не изменяется. Площадь поперечного сечения полости:

$$S_2 = (B-A)^2.$$

3. Начиная с 70-й секунды уровень воды превышает высоту кирпичной конструкции. Из графика следует, что высота кирпича С = 25 см. После 70-й секунды площадь заполняемого объема равна площади дна сосуда.

4. Участок графика с 70-ой по 130 с позволяет определить расход воды (литр за секунду).

$$v = \frac{\Delta h S_0}{\Delta t_3} = \frac{0{,}1\text{м} \times 0{,}054\text{м}^2}{60\,c} = 0{,}09(л/c)$$

5. За первые 60 с уровень воды достиг h_0= 25 см. Объем поступившей воды равен:

$$V = h_0\left(S_0 - (A+B)^2\right).$$

С другой стороны этот объем равен: $V = v\Delta t_1$.

Получим:

$$h_0\left(S_0 - (A+B)^2\right) = v\Delta t_1.$$

Отсюда:

$$(A+B)^2 = S_0 - v\Delta t_1 / h_0 = 0{,}0324\text{м}^2. \qquad (1)$$

6. Заполнение внутренней полости продолжалось 10 с. Следовательно:

$$h_0 (B-A)^2 = v\Delta t_2.$$

Отсюда:

$$(B-A)^2 = -v\Delta t_2 / h_0 = 0{,}0036\text{м}^2. \qquad (2)$$

7. Из уравнений (1) и (2) найдем: В=12 см, А=6 см. Объем кирпича равен 0,0018м^3.

Ответ: А=6 см, В=12 см, С = 25 см. Объем кирпича равен 0,0018м^3.

Задача 4. Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за первую секунду после начала движения проходит путь в **5** раз меньший, чем за последнюю секунду. Найти время падения тела.

Решение

Если тело движется равноускоренно без начальной скорости, то за равные промежутки времени оно проходит пути, относящиеся как:

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 = 1 : 3 : 5 : 7 : 9$$

$$S_1 = \frac{at^2}{2}, \quad v_1 = at$$

$$S_2 = v_1 t + \frac{at^2}{2} = at^2 + \frac{at^2}{2} = 3\frac{at^2}{2} = 3S_1, \quad v_2 = v_1 + at = 2at$$

Так как $S_3 = 5S_1$, то $t = 3$ с.

Ответ: 3 с.

Задача 5. Определите угловую скорость вращения Земли и линейную скорость тел, покоящихся на поверхности Земли на экваторе. Радиус Земли **6400 км**.

Решение

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с.}$$

$$V = \omega R = 7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 6,4 \cdot 10^{6} = 465 \text{ м/с} = 1675 \text{ км/ч}$$

Ответ: $7,27 \cdot 10^{-5}$ рад/с, 1675 км/ч.