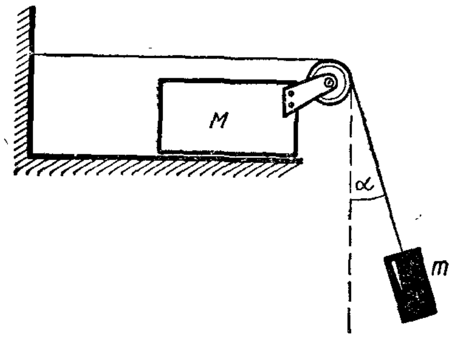
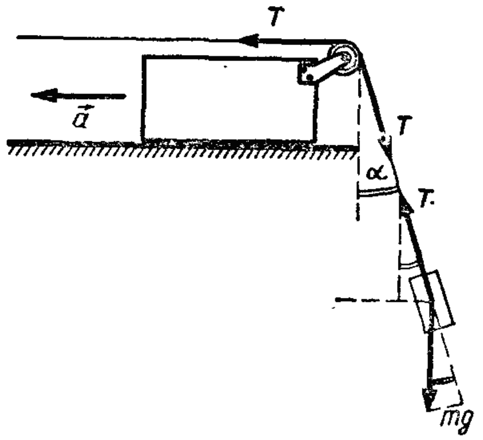
11 класс

11.1 В механической системе, изображенной на рисунке, брусок массой M может скользить по рельсам без трения. В начальный момент груз, подвешенный на нити, отводят на угол α и отпускают. Какова масса m этого груза, если угол, образуемый нитью с вертикалью, не меняется при движении системы?



Решение

Обозначим через T модуль силы упругости нити и через a модуль ускорения бруска (см. рисунок):



Так как угол α при движении системы остается постоянным, то горизонтальная проекция ускорения груза тоже равна a. Очевидно, что равна a и проекция ускорения груза на направление нити (изменение длины отрезка нити, находящегося за блоком, всегда равно модулю перемещения бруска). Поэтому, $mg\cos\alpha - T = ma$ и

$$T\sin\alpha = ma, \qquad (1)$$

где m – масса груза.

На брусок с блоком в точке А действуют две силы упругости нити. Поэтому, для бруска можно записать следующее уравнение (в проекциях на горизонтальное направление):

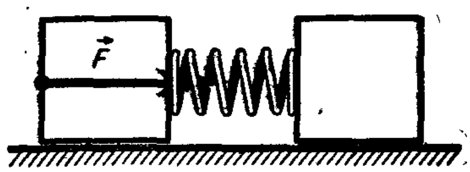
$$T - T\,sin\alpha = Ma. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем:

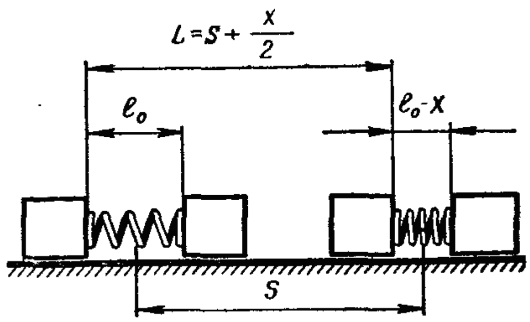
$$m = M\frac{sin2\alpha}{2cos\alpha - sin2\alpha}.$$

Ответ: $m = M\frac{sin2\alpha}{2cos\alpha - sin2\alpha}$.

11.2 На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Кубики соединены пружиной жесткости k. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. На левый кубик начинает действовать сила F, постоянная по модулю и направлению. Найдите минимальное и максимальное расстояние между кубиками при движении системы.



Решение



Когда расстояние l между кубиками минимально или максимально, оба кубика движутся с одинаковой скоростью $\vec{v}$ и кинетическая энергия системы равна $2\frac{mv^2}{2} = mv^2$. При этом потенциальная энергия системы равна потенциальной энергии сжатой пружины, т.е. $\frac{kx^2}{2}$ (где изменение длины пружины считается положительным, если длина l пружины меньше l_0, и отрицательным, если длина l пружины больше l_0). Полная энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергии, т.е. $mv^2 + \frac{kx^2}{2}$. Так как эту энергию система приобрела благодаря работе силы $\vec{F}$, то

$$FL = mv^2 + \frac{kx^2}{2} \qquad (1)$$

Где L – расстояние, которое прошел левый (по рисунку) кубик к тому моменту, когда длина пружины стала минимальной. Если S – расстояние, пройденное центром масс системы (см. рисунок), то

$$L = S + \frac{1}{2}l_0 - \frac{1}{2}(l_0 - x) = S + \frac{x}{2}.$$

Скорость $\vec{v}$ кубиков равна скорости центра масс системы. Так как на систему действует постоянная внешняя сила, то центр масс движется равноускорено с ускорением $a = \frac{F}{m}$. Поэтому, обозначив через t время от начала движения до того момента, когда длина пружины стала равна $l_0 - x$, можно записать:

$$v = at,$$

$$L = \frac{at^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Подставляя эти выражения для v и L в уравнение (1), получим:

$$F\left(\frac{at^2}{2}+\frac{x}{2}\right)=ma^2t^2+\frac{kx^2}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{F^2t^2}{4m}+\frac{x}{2}F=\frac{F^2t^2}{4m}+\frac{kx^2}{2}.$$

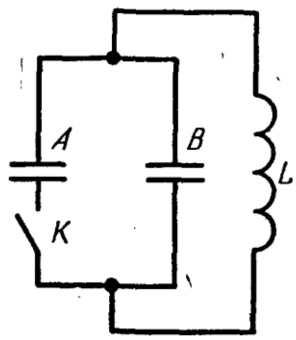
или $Fx = kx^2$.

Следовательно, $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{F}{k}$.

Таким образом, минимальное расстояние между грузами равно $\mathrm{l_{min}} = \mathrm{= l_0 - x_2 = l_0 - \frac{F}{k}}$, а максимальное – $\mathrm{l_{max} = l_0 - x_1 = l_0}$.

Ответ: $l_{min} = l_0 - \frac{F}{k}, l_{max} = l_0$.

11.3 Два одинаковых конденсатора *A* и *B*, с емкостью *C* каждый, и катушка с индуктивностью *L* соединены как показано на рисунке. В начальный момент ключ *K* разомкнут, конденсатор *A* заряжен до напряжения *U*. Конденсатор *B* не заряжен и ток в катушке отсутствует. Определить максимальное значение тока в катушке после замыкания ключа.



Решение

Если бы не было конденсатора B, то после замыкания ключа в контуре возникли бы электромагнитные колебания. Из закона сохранения энергии можно было бы сразу найти максимальный ток. Но при наличии конденсатора *B* сначала произойдет перераспределение заряда между конденсаторами и лишь затем в контуре установятся колебания. Действительно, участок цепи, состоящий из двух конденсаторов и соединительных проводов, тоже можно считать колебательным контуром. Но его индуктивность — индуктивность проводов — очень мала (по сравнению с L), поэтому собственная частота колебаний в этом контуре будет очень большой (намного больше собственной частоты колебаний в контуре, который образуют конденсаторы и катушка индуктивности). Конечно, этот контур обладает и активным сопротивлением, но оно мало по сравнению, например, с индуктивным сопротивлением. Поэтому в течение некоторого времени после замыкания ключа колебания в контуре можно считать незатухающими. В контуре, состоящем из конденсаторов и проводов, произойдет много колебаний тока за то время, пока ток в катушке еще можно будет считать равным нулю. Из-за сопротивления проводов колебания в этом контуре будут затухающими. Это приведет к быстрому установлению равновесия и перераспределению зарядов поровну между конденсаторами (емкости конденсаторов одинаковы). При этом часть энергии электрического поля заряженного конденсатора A перейдет во внутреннюю энергию.

Найдем, какая часть энергии остается в контуре после быстрого перераспределения заряда между конденсаторами. Первоначальный заряд конденсатора A был равен

$$Q = CU.$$

После перераспределения заряда между конденсаторами их заряды стали равны $\frac{Q}{2}$, а энергия – $W = \frac{Q^2}{8C} = \frac{CU^2}{8}$.

Следовательно, полная энергия, которая останется в контуре, равна $\frac{CU^2}{8} + \frac{CU^2}{8} = \frac{CU^2}{4}$.

Так как до замыкания ключа энергия в контуре была равна $W_0 = \frac{CU^2}{2}$,

то во внутреннюю перешла половина первоначальной энергии конденсатора А.

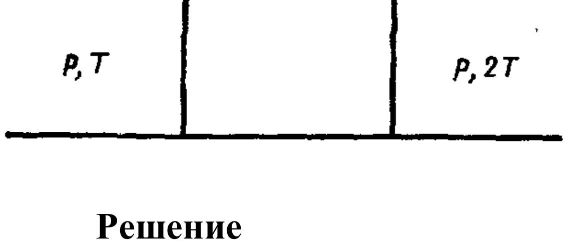
Теперь рассмотрим контур, состоящий из конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке будет максимальным, когда конденсаторы полностью разрядятся и их энергия перейдет в энергию магнитного поля в катушке. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{4} = \frac{LI_{max}^2}{2}.$$

Отсюда, $l_{max} = U\sqrt{\frac{C}{2L}}$.

Ответ: $l_{max} = U\sqrt{\frac{C}{2L}}$.

11.4 Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий. Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным P, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости.



Решение

При равновесии число частиц в полости должно оставаться постоянным. Это означает, что число частиц, которые за время Δt попадают в полость, должно быть равно числу частиц, вылетающих за это время из полости. Используя формулу для числа частиц, попадающих в газе на площадку площадью S, можно число частиц N, попадающих в полость, выразить так:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{1}{2} n_1 S \left|\overline{v_{x_1}}\right| * \Delta t + \frac{1}{2} n_2 S \left|\overline{v_{x_2}}\right| * \Delta t.$$

где n_1 и n_2— значения концентрации частиц, соответственно в левом и правом объемах, $\left|\overline{v_{x_1}}\right|$и $|\overline{v_x}|$- соответственно средние значения модулей проекций скоростей частиц в этих объемах на ось X, перпендикулярную отверстиям.

Число же частиц N_0 , которые за это же время вылетают из полости через отверстия общей площадью 2S, равно

$$N_0 = 2\frac{1}{2} nS|\overline{v_x}|\Delta t.$$

где n-концентрация частиц в полости, $|\overline{v_x}|$ – среднее значение модуля проекции частиц на ось X. Приравнивая N и N_0 получим:

$$n_1\left|\overline{v_{x_1}}\right| + n_2\left|\overline{v_{x_2}}\right| = 2n|\overline{v_x}|.$$

где $\left|\overline{v_{x_1}}\right|, \left|\overline{v_{x_2}}\right|$ и $|\overline{v_x}|$ пропорциональны средним квадратичным скоростям $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ и $\bar{v}$ частиц.

Поэтому можно записать: $n_1\overline{v_1} + n_2\overline{v_2} = 2n\bar{v}$.

Среднеквадратичная скорость частиц определяется формулой:

$$v = \sqrt{\frac{3KT}{m}},$$

где m – масса молекулы и T – температура газа, k – постоянная Больцмана.

Концентрацию же частиц можно найти из формулы $\mathrm{p = nkT}$ для давления p газа:

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{kT}}.$$

Используя эти выражения для v и n, получим:

$$\mathrm{p_1 T_1^{-\frac{1}{2}} + p_2 T_2^{-\frac{1}{2}} = 2p_n T_n^{-\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

Не меняется в полости и полная энергия частиц. Это означает, что энергия, приносимая N частицами, влетающими в полость, уносится $\mathrm{N_0}$ частицами, вылетающими из полости. Но средняя энергия, приходящаяся на одну частицу, равна $\frac{3}{2}\mathrm{kT}$. Следовательно, частицы, попадающие за время Δt в полость, приносят энергию $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{n_1 S}\left|\overline{\mathrm{v_{x_1}}}\right|\Delta t\frac{3}{2}\mathrm{kT_1} + \frac{1}{2}\mathrm{n_2 S}\left|\overline{\mathrm{v_{x_2}}}\right|\Delta t\frac{3}{2}\mathrm{kT_2}$, а частицы улетающие из полости, уносят за это время энергию $\mathrm{E_0} = \frac{1}{2}\mathrm{nS}|\overline{\mathrm{v_x}}|\Delta t\frac{3}{2}\mathrm{kTn}$.

Приравнивая E и $\mathrm{E_0}$, получим:

$$\mathrm{pT^{\frac{1}{2}} + p(2T)^{\frac{1}{2}} = 2p_n T_n^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, найдем:

$$T_n = \sqrt{2}T, \qquad p_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}p.$$

Ответ: $T_n = \sqrt{2}T,\ p_n = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}p.$

11.5 Почему с моста лучше видно рыбу, плывущую в реке, чем с низкого берега?

Решение

Когда рыба рассматривается с моста, лучи света, идущие от нее, проходят поверхность воды почти перпендикулярно к ней. При этом свет отражается от поверхности воды незначительно, и поэтому световой поток, идущий от рыбы, сравнительно велик. Если же рассматривать рыбу с низкого берега, то лучи, идущие от рыбы к наблюдателю, образуют с нормалью к поверхности большой угол и большая часть светового потока отражается от поверхности.

В глаз наблюдателя, кроме того, попадают лучи солнца, создающие слепящий фон. При наблюдении с моста в глаз попадают те лучи, которые падали на поверхность воды и отражались от нее почти под прямым углом. Отражаются эти лучи сравнительно слабо и создают неяркий фон. Наоборот, отражение лучей, попадающих на поверхность под большим углом, велико и солнечный свет при рассматривании рыбы с берега создает яркий фон, ухудшающий условия наблюдения рыбы.