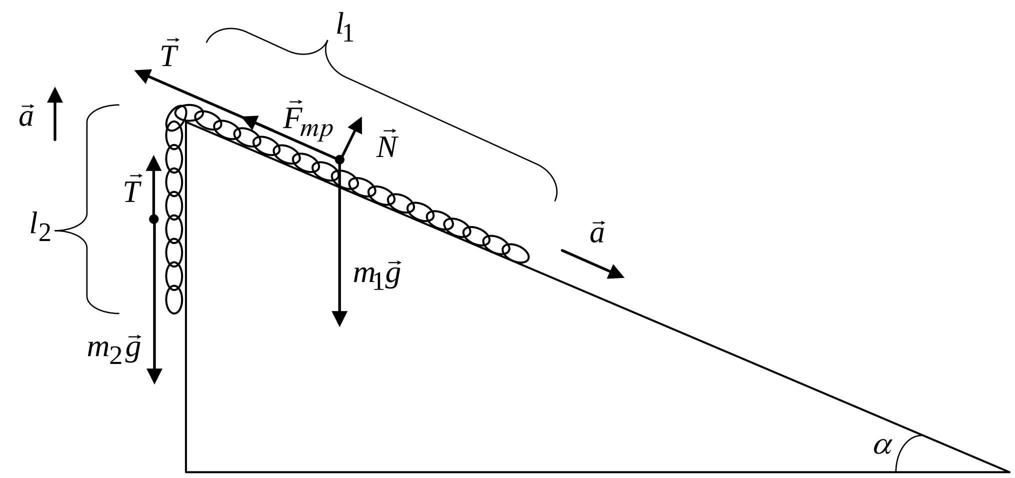
11 класс

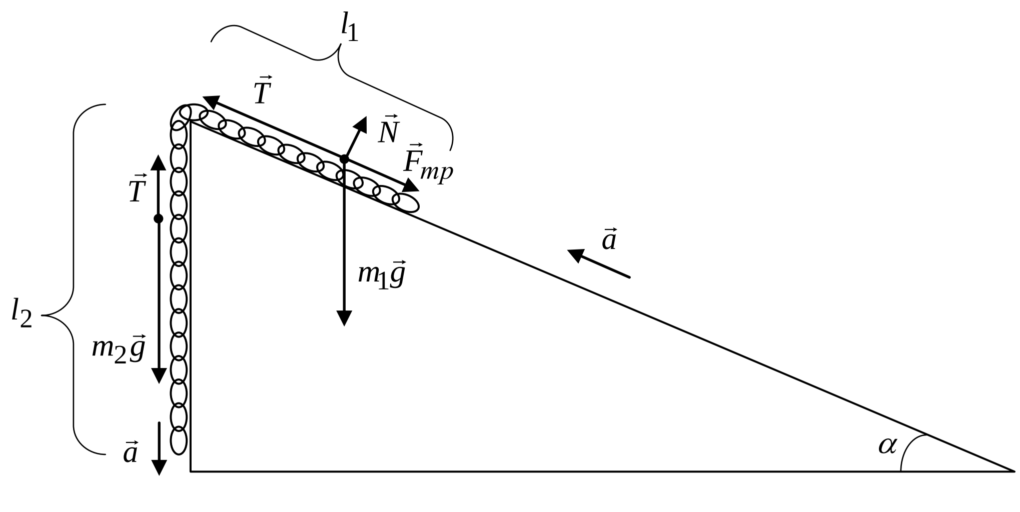
Задача №1. Школьный физик Павел Иванович Буравчик предложил ученикам с помощью длинной цепочки, рулетки и наклонной плоскости определить коэффициент трения цепочки о наклонную плоскость и угол наклона плоскости. Отличник Петя положил цепочку на наклонную плоскость так, что одна её часть длиной l_1 лежала на наклонной плоскости, а другая l_2 свисала вдоль вертикального катета наклонной плоскости. Перемещая цепочку по наклонной плоскости, Петя определил, что при длине $l_1 \geq al_2$, цепочка скользит вниз по наклонной плоскости, а при $l_1 \leq bl_2$ она скользит вверх по наклонной плоскости. Петя сделал рисунок, составил систему уравнений, решил её и определил коэффициент трения цепочки о наклонную плоскость и угол наклона плоскости. Какие значения для угла α и коэффициента μ получил Петя?

Решение

Рисунок, показывающий силы, действующие на цепочку при ее скольжении вниз по наклонной плоскости:



Рисунок, показывающий силы, действующие на цепочку при ее скольжении вверх по наклонной плоскости:



Пусть масса лежащей на наклонной плоскости части цепочки равна m_1, а висящей вдоль вертикального катета m_2.

Рассмотрим случай, когда цепочка скользит вниз по наклонной плоскости.

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая скользит по наклонной плоскости, на ось координат, параллельную направлению скольжения:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - F_{mp} - T.$$

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая скользит по наклонной плоскости, на ось координат, перпендикулярную направлению скольжения:

$0 = N - m_1 g\cos\alpha$, откуда: $N = m_1 g\cos\alpha$.

Тогда для силы трения получим:

$$F_{mp} = \mu \cdot N = \mu m_1 g\cos\alpha.$$

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая свисает вдоль вертикального катета наклонной плоскости, на ось координат, параллельную направлению скольжения:

$m_2 a = T - m_2 g$, откуда $T = m_2 a + m_2 g$.

В итоге получаем:

$$m_1 a = m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - m_2 a - m_2 g$$

Далее рассмотрим предельный случай скольжения цепочки вниз, при котором $l_1 = a l_2$. В этом случае ускорение равно нулю. Преобразуем последнее равенство.

$a(m_1 + m_2) = m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - m_2 g$, откуда

$$m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - m_2 g = 0,$$

$$m_1(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha) = m_2 g.$$

Разделим обе части равенства на m_2:

$$\frac{m_1}{m_2}(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha) = g,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{g}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}.$$

При условии, что цепочка состоит из однородного материала, справедливо равенство:

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho l_1}{\rho l_2} = \frac{l_1}{l_2}$, а поскольку рассматриваем предельный случай, отношение $\frac{l_1}{l_2}$ равно коэффициенту a из условия. Имеем:

$$\frac{1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = a.$$

Теперь рассмотрим случай, когда цепочка скользит вверх по наклонной плоскости.

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая скользит по наклонной плоскости, на ось координат, параллельную направлению скольжения:

$m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha - F_{mp}$.

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая скользит по наклонной плоскости, на ось координат, перпендикулярную направлению скольжения:

$0 = N - m_1 g \cos\alpha$, откуда: $N = m_1 g \cos\alpha$.

Тогда для силы трения получим:

$F_{mp} = \mu \cdot N = \mu m_1 g \cos\alpha$.

Спроецируем силы, действующие на ту часть цепочки, которая свисает вдоль вертикального катета наклонной плоскости, на ось координат, параллельную направлению скольжения:

$m_2 a = m_2 g - T$, откуда $T = m_2 g - m_2 a$.

В итоге получаем:

$m_1 a = m_2 g - m_2 a - m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha$.

Переходя к предельному случаю при $l_1 = b l_2$ и выполняя преобразования, получим:

$$\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = b.$$

Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = a, \\ \dfrac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = b. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, получим искомые значения α и μ:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a+b}{2ab}\right),$$

$$\mu = \frac{a-b}{2ab \cdot \cos\left(\arcsin\left(\dfrac{a+b}{2ab}\right)\right)}.$$

Принимая во внимание, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и, соответственно, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, для μ можем получить:

$$\mu = \frac{a-b}{\sqrt{(2ab-a-b)(2ab+a+b)}}.$$

Ответ: $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{a+b}{2ab}\right)$, $\mu = \dfrac{a-b}{\sqrt{(2ab-a-b)(2ab+a+b)}}$.

Задача №2. В цилиндре под поршнем находится влажный воздух. При изотермическом сжатии объем цилиндра уменьшается в α = 4 раза, при этом давление под поршнем увеличивается только в γ = 3 раза. В начальном состоянии парциальное давление сухого воздуха в β =3/2 раза больше парциального давления водяного пара. Определить относительную влажность воздуха в начальном состоянии. Какая часть первоначальной массы пара сконденсировалась? Объемом образовавшейся воды в сосуде пренебречь.

Решение

Относительная влажность: $\eta = \frac{P_1^n}{P_0} \cdot 100\%$,

где P_1^n – первоначальное парциальное давление пара, P_0 – давление насыщенного пара при заданной температуре.

Так как при изотермическом сжатии $P_1V_1 < P_2V_2$, то пар становится насыщенным и часть его конденсируется. При этом в конечном состоянии: $P_2^n = P_0$.

Количество сухого воздуха при изотермическом сжатии не изменялось, поэтому $P_1^в V_1 = P_2^в V_2$,

где $P^в$ – давление воздуха.

Следовательно, $P_2^в = \frac{P_1^в V_1}{V_2} = \alpha P_1^в$.

Но по условию $P_1^в = \beta P_1^n$, тогда $P_2^в = \alpha\beta P_1^n$.

Давление смеси после сжатия увеличилось в γ раз.

$$P_2 = P_2^n + P_2^в = \gamma\left(P_1^n + P_1^в\right).$$

Откуда:

$$P_2^n = \gamma\left(P_1^n + P_1^в\right) - P_2^в = \gamma\left(P_1^n + \beta P_1^n\right) - \alpha\beta P_1^n = P_1^n(\gamma + \gamma\beta - \alpha\beta).$$

Получаем для первоначальной влажности:

$$\eta = \frac{P_1^n}{P_0} = \frac{P_1^n}{P_2^n} = \frac{1}{(\gamma + \gamma\beta - \alpha\beta)} = \frac{2}{3},$$

$\eta \approx 67\%$.

Для доли от первоначальной массы сконденсированного пара имеем:

$$\frac{\Delta m}{m_1} = \frac{\mu\Delta\nu}{\mu\nu_1} = \frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{\nu_2}{\nu_1},$$

где ν_1 и ν_2 – начальное и конечное количество пара.

$$P_1^n V_1 = \nu_1 RT,\ P_2^n V_2 = \nu_2 RT,\ \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{P_2^n V_2}{P_1^n V_1} = \frac{P_2^n}{\alpha P_1^n},$$

$$\frac{P_2^n}{P_1^n} = \gamma + \gamma\beta - \alpha\beta,$$

$$\frac{\Delta m}{m_1} = 1 - \frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{P_2^n}{\alpha P_1^n} = 1 - \frac{\gamma + \gamma\beta - \alpha\beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \gamma - \gamma\beta + \alpha\beta}{\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha(1+\beta) - \gamma(1+\beta)}{\alpha} = \frac{(\alpha - \gamma)(1+\beta)}{\alpha} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%.$$

Ответ: $62{,}5\%$.

Задача №3. Какая доля полной энергии, высвобождаемой при распаде покоящегося ядра радона ${}^{222}_{86}Rn \to {}^{218}_{84}Po + {}^{4}_{2}He$, уносится α-частицей? Скорость продуктов распада считать малой по сравнению со скоростью света в вакууме.

Решение

При распаде ядра вследствие дефекта масс выделяется энергия. Она превращается в кинетическую энергию разлетающихся продуктов реакции деления.

m_1 =218 а.е.м. – масса ядра полония;

m_2 =4 а.е.м. – масса α -частицы;

V_1 – скорость ядра полония;

V_2 – скорость α -частицы.

$$\frac{W_2}{W_1 + W_2} 100\% - ?$$

$$\frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\frac{m_2 V_2^2}{2}}{\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}} = \frac{m_2 V_2^2}{m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2} = \frac{1}{\frac{m_1 V_1^2}{m_2 V_2^2} + 1} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + 1}$$

Отношение скоростей найдем из закона сохранения импульса:

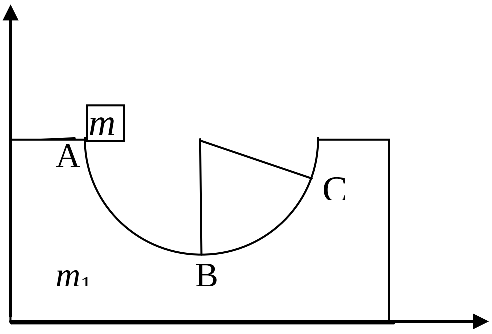
$$\vec{P} = \vec{P}' \quad \vec{P} = 0 \Rightarrow m_1 V_1 - m_2 V_2 = 0 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\frac{W_2}{W_1 + W_2} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\frac{m_2}{m_1} + 1} = \frac{m_1}{m_2 + m_1}$$

$$\frac{W_2}{W_1+W_2}100\% = \frac{m_1}{m_2+m_1} = \frac{218}{222}\cdot 100\% = 98,2\%$$

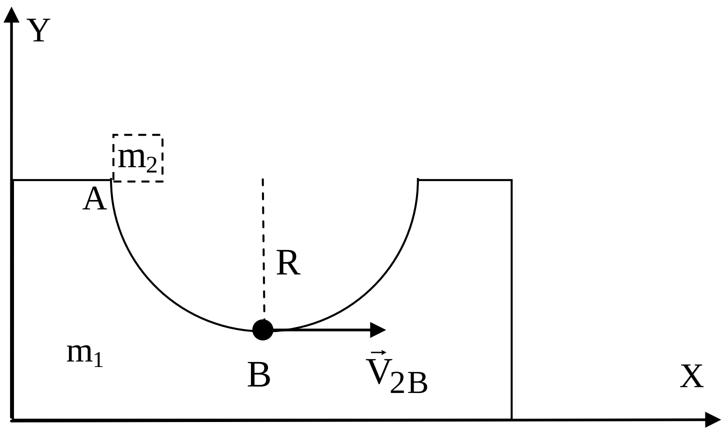
Ответ: 98,2%.

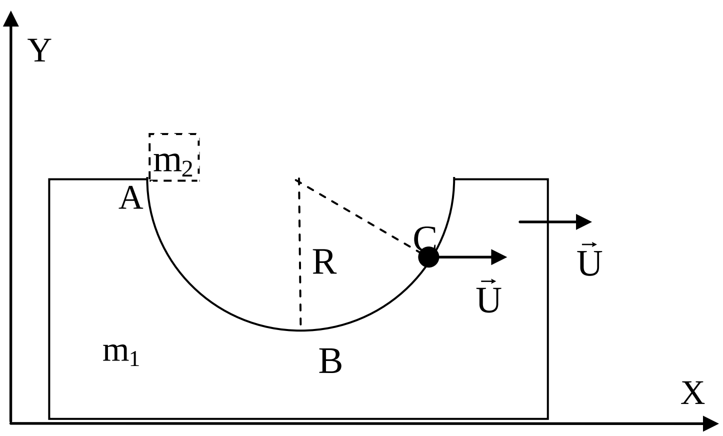
Задача №4. На гладкой горизонтальной поверхности около стенки стоит симметричный брусок массы $m_{1.}$ с углублением полусферической формы радиуса R. Из точки А без трения и начальной скорости соскальзывает маленькая шайба массой m_2. Какова максимальная скорость бруска при его последующем движении, амплитуда колебаний и период колебаний?

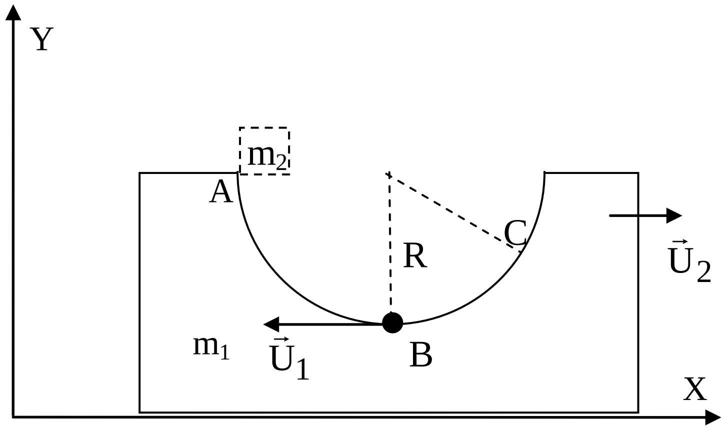


Решение

При движении шайбы от А к В брусок давит на стену, поэтому система брусок-шайба не замкнута. $P \neq const$. После прохождения шайбой точки В брусок начинает двигаться вправо ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), растрачивая энергию шайбы. Поэтому С ниже А. После прохождения шайбой точки В система брусок-шайба становится замкнутой и для неё выполняются законы сохранения (на левую стенку брусок больше не давит).







$$\vec{P} = m_2 V_{2B} = const$$

$$m_2 gR = \frac{m_2 V_{2B}^2}{2}$$

$$V_{2B} = \sqrt{2gR}.$$

Для точки C закон сохранении импульса системы «брусок-шайба» в проекции на горизонтальную ось, направленную вправо:

$$m_2\sqrt{2gR} = (m_1 + m_2)U$$

После точки C, шайба движется влево, а брусок – вправо, и скорость бруска будет максимальна, когда шайба будет в точке B. Затем его скорость будет уменьшаться, т.к. после прохождения справа налево шайбой точки B сила на брусок действует влево.

Законы сохранения энергии и импульса системы «брусок-шайба» для точки B, при движении шайбы справа налево:

$$E = m_2 gR = const$$

$$P = m_2\sqrt{2gR} = const$$

$$\begin{cases} m_2 gR = \dfrac{m_2 U_2^2}{2} + \dfrac{m_2 U_1^2}{2} \\ m_2\sqrt{2gR} = m_1 U_1 - m_2 U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_2 gR - m_2 U_2^2 = m_1 U_1^2 \\ m_2\sqrt{2gR} - m_2 U_2 = m_1 U_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2\left(2gR - U_2^2\right) = m_1 U_1^2 \\ m_2\left(\sqrt{2gR} + U_2\right) = m_1 U_1 \end{cases} :$$

$$\sqrt{2gR} - U_2 = U_1 \qquad U_2 = \sqrt{2gR} - U_1$$

$$m_2\sqrt{2gR}=m_1U_1-m_2\left(\sqrt{2gR}-U_1\right)=m_1U_1-m_2\sqrt{2gR}+m_2U_1$$

$$2m_2\sqrt{2gR}=(m_1+m_2)U_1$$

Таким образом, максимальная скорость бруска:

$$U_1=\frac{2m_2\sqrt{2gR}}{m_1+m_2}.$$

Положение центра масс замкнутой системы «брусок-шайба» в пространстве не изменяется, поэтому для амплитуд колебаний бруска a и шайбы R выполняется соотношение $m_1a=m_2R\Rightarrow a=\frac{m_2R}{m_1}$.

Максимальная амплитуда: $a=\frac{m_2R}{m_1}$.

Теперь найдем период колебаний. Максимальная скорость и амплитуда колебаний тела связаны соотношением:

$$V_{\max}=a\omega=a\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=a\frac{2\pi}{V_{\max}}=\frac{2\pi a}{U_1}=$$

$$=\frac{2\pi a}{\frac{2m_2\sqrt{2gR}}{m_1+m_2}}=\frac{2\pi\frac{m_2R}{m_1}}{\frac{2m_2\sqrt{2gR}}{m_1+m_2}}=\frac{2\pi m_2R(m_1+m_2)}{2m_2m_1\sqrt{2gR}}=\frac{\pi R(m_1+m_2)}{m_1\sqrt{2gR}}.$$

Ответ: $U_1=\frac{2m_2\sqrt{2gR}}{m_1+m_2}$, $a=\frac{m_2R}{m_1}$, $T=\frac{\pi R(m_1+m_2)}{m_1\sqrt{2gR}}$.

Задача №5. Конденсатор емкостью C заряжается от источника постоянного тока с ЭДС ε через резистор сопротивлением R. Как изменится количество выделяющейся на резисторе теплоты и время полной зарядки конденсатора, если вместо одного, в цепь включить два одинаковых параллельно соединенных резистора. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Решение

Закон сохранения энергии $A=W+Q$. Работа сторонних сил источника $A=q\varepsilon$, энергия конденсатора $W=\frac{CU^2}{2}=\frac{C\varepsilon^2}{2}=\frac{(C\varepsilon)\varepsilon}{2}=\frac{q\varepsilon}{2}$. После полной зарядки конденсатора тока в цепи нет, напряжение на резисторе не падает, поэтому напряжение на конденсаторе равно его ЭДС. А количество выделившегося тепла будет равно:

$$Q = A - W = q\varepsilon - \frac{q\varepsilon}{2} = \frac{q\varepsilon}{2} = W = \frac{C\varepsilon^2}{2}.$$

Количество теплоты не зависит от сопротивления резистора, поэтому в обоих случаях оно будет одинаковым.

Ток зарядки $J = \dfrac{\varepsilon - U_C}{r + R}$; $r = 0$; $R_1 = R$; $R_2 = \dfrac{R}{2}$ во втором случае вдвое больше, чем в первом, поэтому время зарядки вдвое меньше.

Ответ: количество выделяющейся на резисторе теплоты не изменится, время полной зарядки конденсатора уменьшится вдвое.