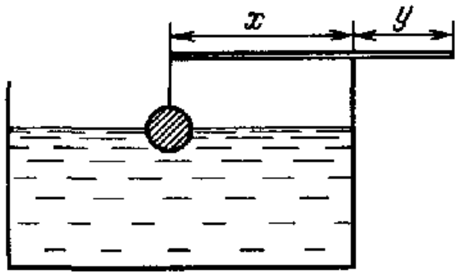
11 класс

Задача №1. К концу однородной палочки массой $M = 4{,}4$ *г* подвешен на невесомой нити однородный алюминиевый шарик радиуса $r = 0{,}5$ *см*. Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду окажется половина шарика (см. рисунок). Плотность алюминия равна $\rho_{ал} = 2{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м³*, плотность воды $\rho_в = 10^3$ *кг/м³*. Определите, в каком отношении *y/x* делится длина палочки в этом случае. Поверхностным натяжением на границе шарика и воды пренебречь.



Решение

Пусть x - длина части палочки, свешивающейся внутрь стакана, а y - длина ее наружной части. Тогда длина палочки равна $x + y$. Центр палочки находится на расстоянии $\frac{x+y}{2}$ от ее концов и на расстоянии $\frac{x-y}{2}$ от наружного края. Условия равновесия получим из равенства нулю суммы моментов сил относительно края стакана:

$$\left(F_ш - F_A\right)x = Mg\frac{x-y}{2},$$

где $F_ш = m_ш g = \rho_{АЛ} V g$ - сила тяжести шарика,

$F_A = \frac{\rho_B V g}{2} F_A$ - выталкивающая сила (сила Архимеда),

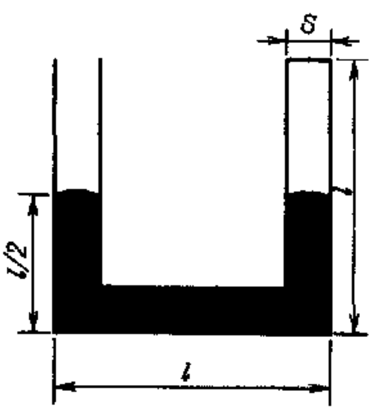
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ - объем шарика.

Искомое отношение равно

$$\frac{y}{x} = \frac{1 + 2\left(F_ш + F_A\right)}{Mg} \approx 1{,}5.$$

Ответ: $\approx 1{,}5$.

Задача №2. Тонкая U-образная, запаянная с одного конца трубка состоит из трех колен длиной по l = 250 *мм* каждое, согнутых под прямыми углами. Вертикальные части трубки заполнены ртутью до половины (см. рисунок). Медленно нагревая в запаянной трубке газ, отделенный от атмосферы ртутью, можно вытеснить из трубки всю ртуть. Определите, какую работу A совершит



при этом газ в трубке, полностью вытеснив ртуть. Атмосферное давление равно $p_o = 10^5$ *Па*, плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6\cdot10^3$ *кг/м*^{3}, поперечное сечение трубки $S = 1$ *см*^{2}.

Решение

Совершаемая газом работа A складывается из. двух частей: работы A_1 против силы атмосферного давления и работы A_2 против силы тяжести. Граница раздела газ - ртуть до полного вытеснения ртути перемещается на

$$2l + \frac{l}{2} = \frac{5}{2}l.$$

и, значит:

$$A_1 = \frac{5}{2}P_0Sl.$$

Работа A_2 против силы тяжести равна изменению потенциальной энергии ртути при ее вытеснении. Вся ртуть в результате вытеснения поднимается на высоту l относительно горизонтального участка; это и надо считать конечной высотой центра масс ртути. Начальное положение центра масс ртути, как нетрудно видеть, равно $h_0 = l/8$. Отсюда можно заключить, что

$$A_2 = Mg\left(l - \frac{l}{8}\right) = \frac{7}{8}Mgl,$$

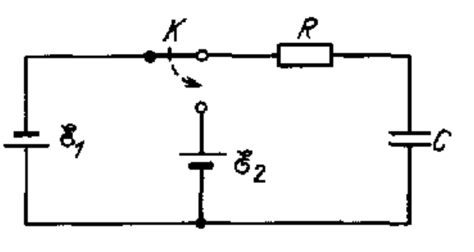
где $M = 2lS\rho_{рт}$ - масса ртути.

Окончательно находим

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2}P_0Sl + \frac{7}{4}\rho_{рт}gSl^2 \approx 7{,}7\,Дж.$$

Ответ: $\approx 7{,}7\,Дж$.

Задача №3. Две батареи с э.д.с. ε_1 и ε_2, конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R соединены, как показано на рисунке. Определите количество теплоты Q, выделяющееся на резисторе после переключения ключа K.



Решение

До переключения ключа K заряд конденсатора равен

$$q_1 = \varepsilon_1 C,$$

причем на нижней пластине окажется положительный заряд, а на верхней - отрицательный.

После переключения ключа K в процессе перезарядки на верхней пластине окажется положительный, а на нижней отрицательный заряд, равный

$$q_2 = \varepsilon_2 C \cdot$$

Таким образом, источник тока с э.д.с. ε_2 совершит работу

$$A = \varepsilon_2 (q_1 + q_2).$$

Искомое количество теплоты, выделяющееся при этом на резисторе, равно

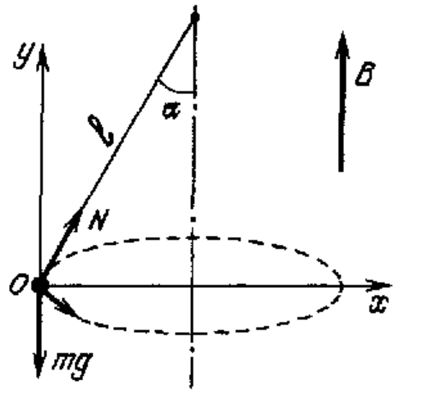
$$Q = A - \Delta E = \varepsilon_2 (q_1 + q_2) - \left(\frac{q_2^2}{2C} - \frac{q_1^2}{2C} \right) = \frac{C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{2}$.

Задача №4. В однородном постоянном во времени магнитном поле, индукция которого B направлена вверх, вращается в горизонтальной плоскости подвешенный на нерастяжимой нити длины l маленький заряженный шарик. Масса шарика равна m, заряд q, период обращения T. Найдите радиус r окружности, по которой движется шарик, если нить все время натянута.

Решение

Выберем систему координат xOy, центр которой совпадает с мгновенным положением шарика (см. рисунок). Ось Ox - «центростремительная», ось Oy направлена вертикально, как и индукция магнитного поля B.



Система уравнений, описывающих движение шарика (считаем, что шарик движется по окружности против часовой стрелки), запишется в виде:

$$N \sin\alpha - qVB = \frac{mV^2}{l \sin\alpha},$$

$$N \cos\alpha = mg \cdot$$

Кроме того,

$$\frac{2\pi r}{V} = T, \quad r = l\sin\alpha.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

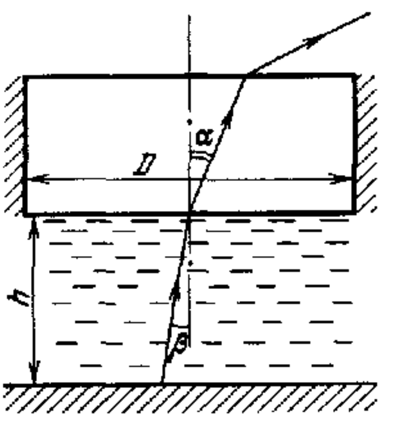
$$r = \sqrt{\frac{l^2 - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{gT} \pm \frac{qB}{mg}\right)^2}}.$$

Знак плюс, если шарик вращается против часовой стрелки, и знак минус, если по часовой стрелке (смотреть надо сверху).

Ответ: $r = \sqrt{\frac{l^2 - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{gT} \pm \frac{qB}{mg}\right)^2}}$.

Задача №5. В днище судна сделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора D = 40 *см* много больше толщины стекла. Определите площадь S обзора дна из такого иллюминатора. Показатель преломления воды равен $n_в$ = 1,4; расстояние до дна h = 5 *м*.

Решение



Наблюдатель внутри корабля сможет увидеть лишь те лучи, для которых $\sin\alpha < \frac{1}{n_{ст}}$. Если $\sin\alpha > \frac{1}{n_{ст}}$, то такой луч испытает полное внутреннее отражение и не попадет к наблюдателю (см. рисунок).

Для угла β имеем соотношение

$$n_B \sin\beta = n_{ст} \sin\alpha.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{n_{cm}}{n_B}\sin\alpha \cdot$$

где n_{cm} — показатель преломления стекла.

Так как

$$\left|\sin\alpha\right| < \frac{1}{n_{cm}},$$

то

$$\left|\sin\beta\right| < \frac{1}{n_B} \cdot$$

Поэтому наблюдатель сможет видеть только те объекты, свет от которых попадает на иллюминатор с углом падения

$$\beta \le \arcsin\left(\frac{1}{n_B}\right) \cdot$$

Из рисунка ясно, что радиус R круга на дне, доступного наблюдению, будет

$$R \approx h \cdot tg\beta \cdot$$

и искомая площадь $\left(h \cdot tg\beta >> \dfrac{D}{2}\right) \cdot$

$$S = \pi R^2 \approx \frac{\pi h^2}{n_B^2 - 1} \approx 82 м^2 \cdot$$

Ответ: $82 м^2$.