10 класс

10.1 Математический маятник отклонили на угол $\alpha = 90^\circ$ от вертикали и отпустили. В момент, когда маятник проходил положение равновесия, точка его подвеса начала двигаться вверх с ускорением $a = 2\,м/с^2$. На какой максимальный угол отклонится маятник по вертикали?

Решение

Из закона сохранения энергии следует, что в тот момент, когда маятник проходил положение равновесия, его кинетическая энергия была равна:

$$\frac{mV^2}{2} = mgl.$$

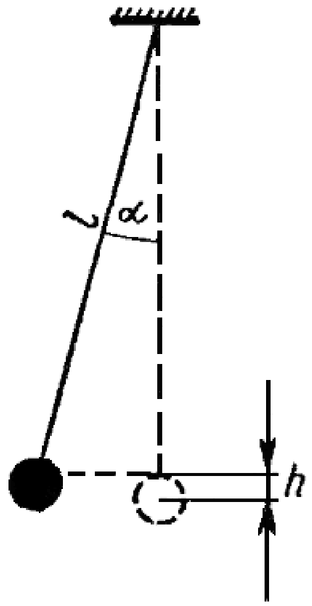
Отсюда

$$V = \sqrt{2gl},$$

где l – длина маятника.

В дальнейшем маятник будет двигаться так, как если бы точка подвеса покоилась, а сила тяжести стала равной

$$F_m = m\left(\vec{g} - \vec{a}\right).$$



При максимальном отклонении маятника (см. рисунок) его потенциальная энергия была бы в этом случае равна

$$E_n = m(g + a)h,$$

где $h = l(1 - \cos\alpha)$.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$m(g + a)h = \frac{mV^2}{2},$$

или

$$(g+a)l(1-\cos\alpha)=gl.$$

Отсюда

$$\cos\alpha=\frac{a}{g+a}.$$

Отсюда $\cos\alpha\approx 0{,}17$, $\alpha\approx 1{,}4$ рад, $\alpha\approx 80{,}2^\circ$.

Ответ: $\alpha\approx 80{,}2^\circ$.

10.2 В каком случае пуля, пробивающая две коробки, в одной из которых находится мед, а в другой – вода, пролетит дальше: если она сначала попадает в коробку с медом, или если сначала она попадает в коробку с водой?

Решение

При движении пули в жидкости с большой скоростью на пулю действует сила сопротивления, пропорциональная скорости:

а) при движении в воде –

$$F_{сопр}=-\alpha_1 V,$$

б) при движении в меду –

$$F_{сопр}=-\alpha_2 V,$$

где $\alpha_2>\alpha_1$.

Разобьем жидкость на тонкие слои. При прохождении одного i-ого слоя толщиной x_i импульс пули изменится на

$$|\Delta p_i|=|m\cdot\Delta V_i|=|F_{сопр.ср}\cdot\Delta t|.$$

Так как

$$\Delta t=\frac{x_i}{V_{ср}}=\frac{2x_i}{V_i+V_{i-1}},$$

$$F_{сопр.ср}=\frac{F_i+F_{i-1}}{2}=\alpha\frac{V_i+V_{1-1}}{2},$$

то

$$\Delta p_1=\alpha x_i.$$

Отсюда следует, что при пролете через коробку с водой модуль импульса пули изменится на

$$\Delta p=\Sigma\Delta p_i=\alpha_1 l,$$

где l – длина коробки.

А при пролете через коробку с медом модуль импульса пули изменится на

$$\Delta p' = \alpha_2 l.$$

Очевидно, что независимо от расположения коробок при пролете через обе коробки модуль импульса пули уменьшится на $(\alpha_1 + \alpha_2)l$. Следовательно, дальность полета пули в обоих случаях будет одинаковой.

Ответ: дальность полета пули в обоих случаях будет одинаковой.

10.3 К динамометру приложена сила $F = 4H$ так, что он движется с постоянным ускорением по горизонтальному столу. Что показывает динамометр, если масса пружины равна массе корпуса?

Решение

Возникающая при растяжении пружины сила упругости T пропорциональна удлинению пружины ΔL:

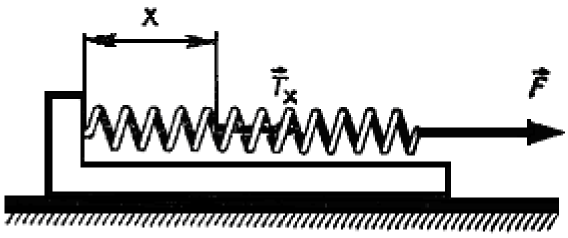
$$T = k \cdot \Delta L,$$

где k – жесткость пружины.

В обычных условиях, когда динамометр неподвижен, сила упругости в любом сечении пружины одна и та же, т.е. любые равные участки пружины удлиняются при растяжении на одну и ту же величину.

При движении динамометра с ускорением дело обстоит иначе.

Рассмотрим сечение пружины, которое находится на расстоянии x от ее конца, прикрепленного к корпусу динамометра (см. рисунок).



Сила упругости T_x сообщает ускорение корпусу динамометра и участку пружины длиной x. Масса этого участка пружины равна

$$M_x = \frac{M}{L} x,$$

где M – масса пружины,

L – длина всей пружины.

Поскольку динамометр движется с ускорением, сила упругости в сечении x по второму закону Ньютона будет равна:

$$T_x = \left(M + \frac{M}{L} x \right) a,$$

где a – ускорение.

Т.к. ускорение динамометру сообщает сила F, то

$$a = \frac{F}{M + M} = \frac{F}{2M}.$$

Тогда

$$T_x = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right).$$

Т.е. сила изменяется от сечения к сечению вдоль пружины.

Для того, чтобы найти растяжение пружины, мысленно разобьем нерастянутую пружину на маленькие участки Δl. На каждом таком участке силу упругости можно считать постоянной. Пусть таких участков будет n. Т.к. при одной и той же силе упругости деформация n последовательно соединенных участков будет в n раз больше деформации одного участка, то жесткость одного участка в n раз больше жесткости всей пружины

$$k_1 = kn.$$

Будем отсчитывать участки от конца пружины, прикрепленного к динамометру. Удлинение i-ого участка равно

$$\Delta l_i = \frac{T_i}{k_1} = \frac{T_i}{kn}.$$

Тогда сила упругости будет равна

$$T_i = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{il}{nl}\right) = \frac{F}{2}\left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Поэтому

$$\Delta l_i = \frac{F}{2kn}\left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Полное удлинение пружины найдем суммированием удлинений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \frac{1}{2kn} F \sum\left(1 + \frac{i}{n}\right).$$

Т.к. сумма $\sum\left(1 + \frac{i}{n}\right)$ представляет собой сумму членов арифметической прогрессии, то

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \frac{F}{4k}\frac{3n+1}{n}.$$

Т.к. $n >> 1$, то

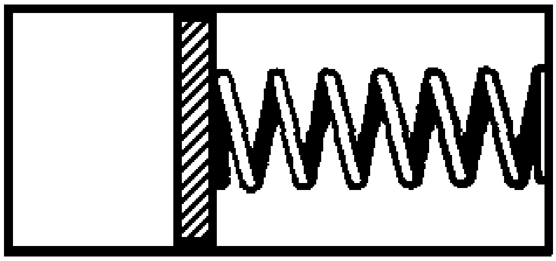
$$\Delta l \approx \frac{3}{4}\frac{F}{k}.$$

Подставив это выражение для ΔL в первую формулу, найдем показания динамометра:

$$T = k \cdot \frac{3}{4}\frac{F}{k} = \frac{3}{4}F = 3H.$$

Ответ: $3H$.

10.4 В расположенном горизонтально цилиндре (см. рисунок) слева от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа. В правой части цилиндра вакуум, а пружина, расположенная между поршнем и стенкой цилиндра, находится в недеформированном состоянии. Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды. Когда поршень освободили, объем, занимаемый газом, увеличился вдвое. Как изменятся температура газа и его давление? Теплоемкости цилиндра, поршня и пружины пренебрежимо малы.



Решение

Согласно первому закону термодинамики:

$$Q = \Delta U + A.$$

Но в данном случае сосуд теплоизолирован и $Q = 0$.

Следовательно

$$\Delta U + A = 0.$$

Пусть начальное состояние газа описывалось параметрами P_1, V_1, T_1, а конечное – P_2, V_2, T_2, причем $V_2 = 2V_1$ по условию. Так как внутренняя энергия идеального газа пропорциональна его температуре, то ее изменение пропорционально изменению температуры:

$$\Delta U = C_V \nu (T_2 - T_1),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме,

ν – число молей газа.

Работа, совершенная газом, равна изменению потенциальной энергии деформированной пружины:

$$A = \frac{kx^2}{2},$$

где x – смещение поршня.

Выразим изменение потенциальной энергии через параметры газа.

Так как после установления равновесия поршень находится в покое, сила упругости пружины равна силе давления газа:

$$kx = p_2 S,$$

где S – площадь поверхности поршня.

Давление газа связано с его температурой уравнением состояния:

$$p_2 V_2 = \nu R T_2.$$

Так как объем газа увеличился вдвое, а изменение объема равно Sx, То

$$V_2 = 2Sx$$

и, следовательно,

$$2 p_2 S x = \nu R T_2.$$

Тогда

$$kx = \frac{\nu R T_2}{2x}$$

или

$$kx^2 = \frac{\nu R T_2}{2}.$$

Таким образом, работа, совершенная газом, равна:

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{\nu R T_2}{4}.$$

Тогда

$$C_V \nu (T_2 - T_1) + \frac{\nu R T_2}{4} = 0.$$

Отсюда

$$T_2 = T_1 \frac{i}{1 + \frac{1}{4}\frac{R}{C_V}}.$$

Следовательно,

$$T_2 < T_1.$$

Теперь можно найти, как изменится давление газа.

Так как $V_1 = \frac{V_2}{2}$, то согласно уравнению газового состояния

$$p_1 \frac{V_2}{2} = \nu R T_1.$$

Разделив, получим:

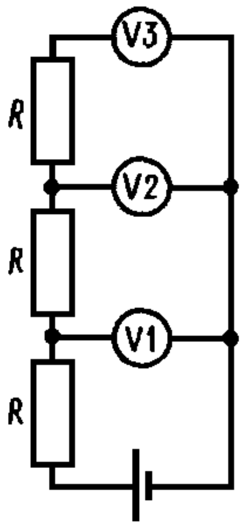
$$\frac{p_1}{p_2} = 2\frac{T_1}{T_2} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{C_V}\right),$$

или

$$p_2 = \frac{p_1}{2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{R}{C_V}\right)}.$$

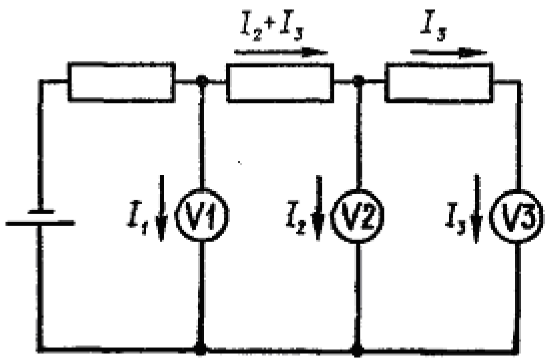
Давление тоже уменьшилось.

Ответ: температура газа уменьшилась, давление уменьшилось.



10.5 Цепь, показанная на рисунке, собрана из одинаковых резисторов и одинаковых вольтметров. Первый вольтметр показывает напряжение $U_1 = 10B$, а третий – $U_3 = 8B$. Какое напряжение показывает второй вольтметр?

Решение



Обозначив через r сопротивление каждого из вольтметров, можно по схеме записать:

$$U_3 = rI_3, U_2 = rI_2, U_1 = rI_1.$$

С другой стороны

$$U_2 = U_3 + I_3 R = U_3 + U_3 \frac{R}{r},$$

$$U_1 = U_2 + (I_2 + I_3)R = U_2 + (U_2 + U_3)\frac{R}{r}.$$

Исключая из этих уравнений $\frac{R}{r}$, получим:

$$U_2^2 + U_2 U_3 - U_1 U_3 - U_3^2 = 0.$$

Отсюда

$$U_2 = -\frac{1}{2}U_3 + \sqrt{\frac{U_3}{4}(5U_3 + 4U_1)} \approx 8{,}6B.$$

Ответ: $U_2 \approx 8{,}6B$