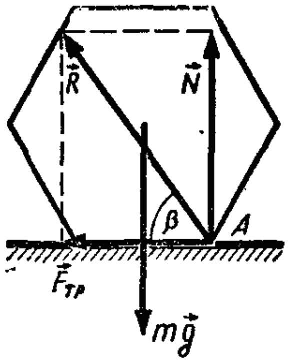
10 класс

10.1 Кубик из пенопласта массой *M = 100 г* лежит на горизонтальной подставке. Высота кубика *h = 10 см*. Снизу кубик пробивает вертикально летящая пуля массой *m = 10 г*. Скорость пули при входе в кубик *V_1 = 100 м/с,* при вылете – *95 м/с*. Подпрыгнет ли кубик?

Решение

Кубик может подпрыгнуть, если модуль силы $\vec{F}$, действующий на него со стороны пули, окажется большим модуля силы тяжести $Mg = 1$Н. Найдем эту силу. Для этого рассмотрим пулю. На нее со стороны кубика действует такая же по модулю, но противоположная по направлению сила и сила тяжести $m\vec{g}$.



Скорость пули при пролете сквозь кубик меняется незначительно: ее изменение равно 5 м/с, что составляет всего 5% от скорости пули при входе в кубик. Поэтому, можно считать, что сила $\vec{F}$ не зависит от скорости пули и постоянна.

Импульс пули при пролете сквозь кубик меняется благодаря действию на пулю двух сил – силы тяжести и силы трения. Если время, за которое пуля пролетает сквозь кубик, обозначить через τ, то:

$$m(v_1 - v_2) = (F + mg)\tau \tag{1}$$

Время τ найти нетрудно. Так как силы, действующие на кубик, постоянны, то постоянно и ускорение пули, а, значит, скорость пули меняется со временем линейно. Поэтому, средняя скорость движения пули в кубике равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Следовательно, пуля пролетает сквозь кубик за время

$$\tau = \frac{\text{h}}{v_{\text{ср}}} = \frac{2\text{a}}{v_1 + v_2} \approx 10^{-3}\text{c}.$$

Подставив это значение τ в формулу (1), найдем:

$$F = \frac{m(v_1 + v_2) - \mu g\tau}{\tau} \approx 50\text{Н}.$$

Так как τ мало, то величина $\mu g\tau$ много меньше изменения импульса пули и ею можно пренебречь. Сила F оказалась больше силы тяжести, которая действует на кубик. Поэтому, кубик подпрыгнет.

Ответ: кубик подпрыгнет.

10.2 Какую силу F должен приложить человек массой m, чтобы сдвинуть с места ящик массой M? Коэффициенты трения о пол человека и ящика одинаковы и равны μ. Считать $M > m$.

Решение

Рассмотрим случай, когда человек тянет ящик. Для того, чтобы сдвинуть ящик, не скользя по полу, человек должен приложить к ящику силу $\vec{F}$, горизонтальная проекция которой по абсолютному значению больше или равна силе трения покоя ящика о пол и меньше силы трения покоя человека о пол:

$$F\cos\alpha \geq \mu(Mg - F\sin\alpha)$$
$$F\cos\alpha \leq \mu(mg + F\sin\alpha)$$

где α – угол между приложенной к ящику силой и горизонтом.

Отсюда,

$$\mu F\sin\alpha \geq \mu Mg - F\cos\alpha$$
$$\mu F\sin\alpha \geq F\cos\alpha - \mu mg$$

Решая эту систему уравнений относительно $F\sin\alpha$ и $F\cos\alpha$, получаем:

$$F\sin\alpha \geq \frac{1}{2}(M-m)g$$
$$F\cos\alpha \geq \frac{1}{2}\mu(M+m)g$$

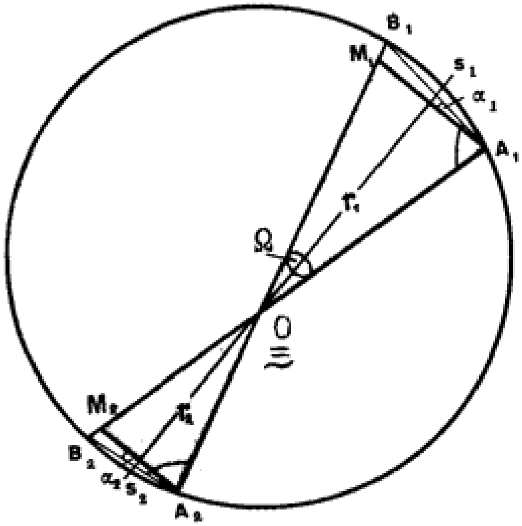
Следовательно, $F \geq \frac{1}{2}g\sqrt{(M-m)^2 + \mu^2(M+m^2)}$.

Ответ: $F \geq \frac{1}{2}g\sqrt{(M-m)^2 + \mu^2(M+m^2)}$.

10.3 Найти давление в центре сферы радиуса R, если жидкость несжимаема и имеет плотность ρ. Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V = 4/3\pi R^3$.

Решение

Разобьем объем сферы на тонкие сферические слои толщиной Δr.



Легко показать, что равнодействующая гравитационных сил, действующих со стороны слоя на частицу внутри этого слоя, равна нулю. Действительно, рассмотрим для этого конус с малым углом при вершине, в которую помещена частица массой *m*. Конус вырезает из слоя участки площадями S_1 и S_2 (рисунок). Если масса вещества, приходящегося на единицу поверхности слоя, равна μ, то гравитационные силы, действующие на массу *m* со стороны участков S_1 и S_2, равны

$$F_1 = G\frac{m\mu S_1}{r_1^2},\ F_2 = G\frac{m\mu S_2}{r_2^2};$$

но

$$\frac{S_1}{r_1^2}\cos\alpha_1 = \frac{S_2}{r_2^2}\cos\alpha_2 = \Omega$$

(Ω – телесный угол при вершине конуса), а $\alpha_1 = \alpha_2$; заштрихованные треугольники подобны, то есть

$$\angle OA_1M_1 = \angle OA_2M_2,\ \angle OA_1B_1 = \angle OA_2B_2$$

(они опираются на одну и туже дугу) и

$$\alpha_1 = \angle OA_1B_1 - \angle OA_1M_1,\ \alpha_2 = \angle OA_2B_2 - \angle OA_2M_2.$$

Поэтому

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}$$

Благодаря этому $F_1 = F_2$, то есть эти силы взаимно уравновешивают друг друга. Проведя аналогичное рассмотрение для других участков слоя, мы и докажем сделанное утверждение.

Сила, с которой притягивается элемент слоя $\Delta S\Delta r$ к центру сферы, равна

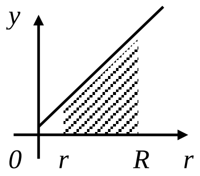
$$F = G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho\Delta S\Delta r\rho}{r^2},$$

где r – расстояние от элемента до центра сферы. Отсюда найдем, что увеличение давления на участке толщиной ΔS равно.

$$\Delta p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 r\Delta r$$

Поэтому давление на расстоянии $r_о$ от центра сферы будет равно

$$p = p_o + \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \sum r\Delta r$$



Так как сумма $r\Delta r$ равна площади фигуры, ограниченной графиком $y = r$ и осью r (рисунок), то

$$\sum r\Delta r = \frac{(R+r_o)(R-r_o)}{2} = \frac{R^2 - r_o^2}{2}$$

Поэтому

$$p = p_o + \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r_o^2)$$

$p_о$ – давление на поверхности сферы, которое можно принять равным нулю. Тогда

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r_o^2)$$

В центре сферы ($r_о = 0$) давление будет равно

$$p = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2$$

Ответ: $p = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2$

10.4 Заряженные шарики одинаковой массы, расположенные на расстоянии l друг от друга, отпустили без начальной скорости. Через время t расстояние между ними удвоилось. Через какое время удвоится расстояние между этими шариками, если их отпустить с начального расстояния $3l$?

Решение

Шарики удаляются друг от друга под действием силы электрического отталкивания:

$$F = k\frac{q^2}{r^2},$$

где q – заряд каждого шарика, r – расстояние между шариками и

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Эта сила и, следовательно, ускорения шариков меняются по модулю по мере изменения расстояния между шариками. Поэтому движение шариков не будет равноускоренным.

Разобьем перемещения шариков в первом и во втором случаях на одинаковое число участков, таких, чтобы относительные перемещения в обоих случаях были одинаковыми. Обозначим расстояние между шариками в начальный момент через $2x_0$, а в некоторый последующий момент времени — через *2x*. Величина $\xi = \frac{x}{x_0}$ есть относительное перемещение шариков.

Пусть ξ изменилось на величину Δξ.

Тогда перемещение каждого шарика в первом случае (когда $2x_0 = l$) равно:

$$\Delta x_1 = \Delta\,\xi \frac{1}{2},$$

а во втором случае (когда $2x_0 = 3l$) – $\Delta x_2 = \Delta\,\xi \frac{3}{2} l$.

Поэтому

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 3.$$

Теперь сравним средние скорости шариков. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. В начальный момент шарики обладают только потенциальной энергией электрического взаимодействия:

$$W_0 = k\frac{q^2}{2x_0}.$$

Когда же расстояние между шариками станет равным *2x,* их потенциальная энергия примет значение

$$W = k\frac{q^2}{2x},$$

а кинетическая энергия — значение

$$W_k = 2\frac{mv^2}{2},$$

где m — масса шарика. По закону сохранения энергии

$$k\frac{q^2}{2x_0} = k\frac{q^2}{2x} + mv^2.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{k\frac{q^2(\xi - 1)}{2x_0 m\xi}}.$$

Таким образом, при одном и том же значении относительного перемещения скорость шарика в первом случае больше, чем во втором, в

$$\sqrt{\frac{q^2}{ml}} : \sqrt{\frac{q^2}{3ml}} = \sqrt{3} \text{ раза.}$$

При изменении на величину $\Delta\xi$ средние скорости шариков будут отличаться тоже в $\sqrt{3}$ раз:

$$\frac{v_{\text{ср.1}}}{v_{\text{ср.2}}} = \sqrt{3}.$$

Промежутки времени, за которые шарики перемещаются на Δx_1 в первом случае и на Δx_2 во втором случае, равны соответственно

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{\text{ср.1}}},$$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{\text{ср.2}}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\frac{v_{\text{ср.1}}}{v_{\text{ср.2}}} = 3\sqrt{3}.$$

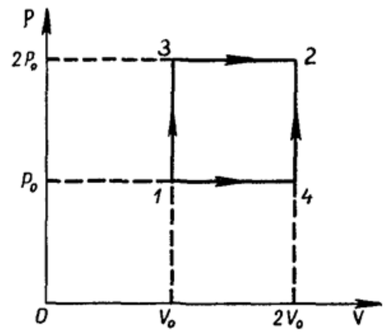
Следовательно, при любом изменении величины ξ время движения в первом случае больше времени движения во втором случае в $3\sqrt{3}$ раза.

Когда расстояния между шариками удвоятся, полное время t_2 будет больше времени t_1 тоже в $3\sqrt{3}$ раза:

$$t_2 = 3\sqrt{3}t_1 = 3\sqrt{3}t$$

Ответ: $3\sqrt{3}t$.

10.5 Идеальный одноатомный газ, находящийся при нормальных условиях, переводят из состояния *1* в состояние *2* двумя способами: *1–3–2* и *1–4–2* (см. рисунок). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить *1 кмоль* газа в этих двух процессах.



Решение

Согласно первому закону термодинамики сообщаемое газу количество теплоты Q равно сумме изменения внутренней энергии газа ΔU и совершаемой газом работы *A:*

$$Q_I = \Delta U_I + A_I,$$

$$Q_{II} = \Delta U_{II} + A_{II}.$$

Здесь индекс I относится к процессу $1 \to 3 \to 2$, а индекс II - к процессу $1 \to 4 \to 2$.

Так как газ одноатомный, то для одного моля

$U = \frac{3}{2}RT$

и

$$\Delta U = \frac{3}{2} R \Delta T.$$

Следовательно

$$\Delta U_I = \Delta U_{II} = \Delta U = \frac{3}{2} R \times (T_2 - T_1).$$

Разность температур $T_2 - T_1$ можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона, записанного для состояний 1 и 2:

$$p_0 V_0 = R T_1,$$
$$2p_0 2V_0 = R T_2,$$
$$T_2 - T_1 = \frac{3p_0 V_0}{R}.$$

Поэтому

$$\Delta U = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

Теперь найдем значения работы газа A_I и A_{II}. В случае I работа совершается только при переходе $3 \to 2$.

Поэтому,

$$A_I = p \Delta V = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0 V_0.$$

В случае II работа совершается только при переходе $1 \to 4$ и, следовательно,

$$A_2 = p_0(2V_0 - V_0) = p_0 V_0.$$

Таким образом,

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{13}{2} p_0 V_0,$$
$$Q_{II} = \Delta U + A_{II} = \frac{11}{2} p_0 V_0,$$
$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}.$$

Ответ: $\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}$.