9 класс

9.1 Решите уравнение: $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Решение:
Воспользуемся подстановкой $y=x+4$, тогда $x+3=y-1, x+5=y-1$, тогда данное уравнение примет вид:

$$(y-1)^4+(y+1)^4=16 \quad .$$

Преобразуем его

$$((y-1)^2-(y+1)^2)^2+2(y-1)^2(y+1)^2=16;$$
$$(-2\cdot 2y)^2+2(y^2-1)^2=16;$$
$$16y^2+2(y^4-2y^2+1)=16;$$
$$y^4+6y^2-7=0;$$
$$(y^2-1)(y^2+7)=0,$$

где $y^2+7>0$ для любого y. Значит, $y^2-1=0, y=\pm 1$.
Возвращаясь к подстановке, находим

$$x_1=-3,\;\; x_2=-5.$$

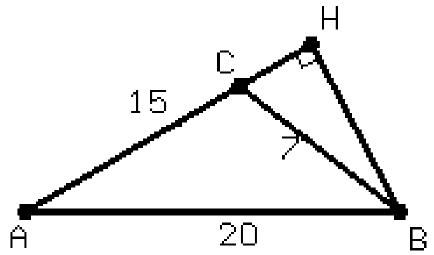
Ответ: –3, –5.

9.2 Докажите, что дробь $\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ несократима ни при каких целых n.

Решение:
Пусть числитель и знаменатель имеют общий делитель $k>1$, то есть $n^4+4n^2+3=(n^2+1)(n^2+3)\,\vdots\, k$ и $n^4+6n^2+8=(n^2+4)(n^2+2)$ делится на k. Оба сомножителя числителя взаимно просты с n^2+2. Значит, из того, что $(n^2+4)(n^2+2)\,\vdots\, k$, следует, что $(n^2+4)\,\vdots\, k$. Так как n^2+4 взаимно просто с n^2+3, то из того, что $(n^2+1)(n^2+3)\,\vdots\, k$, следует, что $(n^2+1)\,\vdots\, k$. Поскольку n^2+4 и n^2+1 делятся на k, то $3\,\vdots\, k$. Тогда k должно равняться 3, чего быть не может, так как n^2 не может давать остаток 2 при делении на 3. Значит, предположение неверно и дробь несократима.
Доказано.

9.3 Пусть в треугольнике ABC $AC=15$, $BC=7$, $AB=20$. Докажите, что $\angle A+2\angle B=90^\circ$.

Решение:



Поскольку $7^2+15^2<20^2$, то угол C – тупой. На продолжении AC отметим точку H - основание высоты из вершины B. Применяя два раза теорему Пифагора, получим равенства

$(15+CH)^2+HB^2=20^2$, $CH^2+HB^2=7^2$.

Вычитая из первого второе, находим

$$15^2+30CH=20^2-7^2 \Rightarrow CH=\frac{21}{5}.$$

Поэтому

$$HB^2=7^2-CH^2=\left(\frac{28}{5}\right)^2 \Rightarrow HB=\frac{28}{5}$$

Из этих вычислений следует, что

$$\frac{AB}{BH}=\frac{AC}{CH}.$$

То есть, BC - биссектриса угла ABH в прямоугольном треугольнике AHB. Следовательно, $\angle A+2\angle B=90^o$.

Доказано.

9.4 На уборке урожая работали несколько человек. Если бы их было на 3 меньше, то они проработали бы на два дня больше, а если бы их было на 4 больше, то работа была бы окончена на два дня раньше. Сколько человек работали на уборке урожая?

Решение:

Пусть в бригаде было x человек, а работа заняла y дней. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} xy=(x-3)(y+2) \\ xy=(x+4)(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=6, \\ 4y-2x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=24, \\ y=14. \end{cases}$$

Ответ: 24.

9.5 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет два корня, причем один из них больше трех, а второй – меньше трех.

Решение:
Обозначим исходное уравнение как (1). Оно имеет корни

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Тогда неравенство $x_1 > 3$ равносильно неравенству

$$\sqrt{a^2 - 4} > 6 + a \ (2).$$

Корень действителен, если $a^2 - 4 \geq 0$.
Возможны два случая: $6 + a < 0$ и $6 + a \geq 0$, поэтому неравенство (2) равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 6 + a < 0, \\ a^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} 6 + a \geq 0, \\ a^2 - 4 \geq 0, \\ a^2 - 4 > (6 + a)^2, \end{cases}$$

или систем

$$\begin{cases} a < -6, \\ |a| \geq 2 \end{cases} \text{и} \begin{cases} a \geq -6, \\ a < -3\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Решения этих систем заключены соответственно в промежутках $-\infty < a < -6$ и $-6 \leq a < -3\frac{1}{3}$, объединяя эти промежутки, получаем

$$-\infty < a < -3\frac{1}{3} \ (3).$$

При условии (3) выполняется также и неравенство $x_2 < 3$. По теореме Виета из (1) получаем $x_1 \cdot x_2 = 1$. Отсюда, если $x_1 > 3$, то $x_1 > 0, x_2 > 0, x_2 < \frac{1}{3}$ и, значит, $x_2 < 3$.

Ответ: $a < -3\frac{1}{3}$.