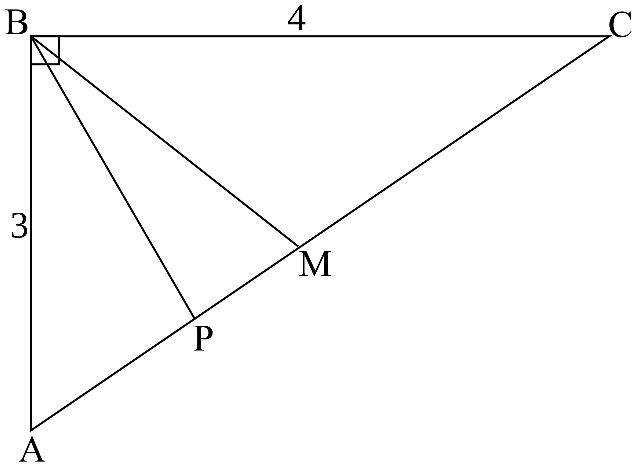
9 класс

9.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Из вершины B прямого угла проведены медиана BM и биссектриса BP. Найдите длину отрезка PM.

Решение:

См. рисунок.



По теореме Пифагора гипотенуза равна 5. Отсюда $\mathrm{AM} = \frac{5}{2}$. По свойству биссектрисы $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}} = \frac{3}{4}$. Т.к. $\mathrm{AP} + \mathrm{PC} = 5$, то $\mathrm{AP} + \frac{4}{3}\mathrm{AP} = 5$, $\frac{7}{3}\mathrm{AP} = 5$, $\mathrm{AP} = \frac{15}{7}$. Следовательно, $\mathrm{PM} = \mathrm{AM} - \mathrm{AP} = \frac{5}{2} - \frac{15}{7} = \frac{5}{14}$.

Ответ: $\frac{5}{14}$.

9.2 Уравнение $x^2 + px + q = 0$ корней не имеет, а уравнение $x^2 + px + q = -x$ – имеет. Докажите, что $p > -\frac{1}{2}$.

Решение:

По условию, дискриминант трехчлена $x^2 + px + q$ отрицателен (корней нет): $p^2 - 4q < 0$. Дискриминант трехчлена $x^2 + (p+1)x + q$ неотрицателен (корни есть): $(p+1)^2 - 4q \geq 0$, т.е. $p^2 - 4q + 2p + 1 \geq 0$, откуда $2p + 1 > 0, p > -\frac{1}{2}$.

Доказано.

9.3 Прямая на координатной плоскости проходит через начало координат и точку (2013;100). Докажите, что точка (100;4,9) лежит ниже этой прямой.

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $y = kx$. Прямая проходит через точку $x = 2013, y = 100$, поэтому $100 = k2013$, $k = \frac{100}{2013}$, тогда уравнение прямой $y = \frac{100}{2013}x$. При $x = 100$ соответствующая точка прямой имеет координату $y = \frac{100}{2013} \cdot 100 = 4{,}96 \ldots$ Это означает, что точка (100;4,9) лежит ниже прямой.

Доказано.

9.4 Найдите три числа x, y, z по следующим условиям: $x + y + z = 1$, $y \geq z$, $x^2 + 4y^2 + x^2 y = 4xy + x^2 z$.

Решение:

Равенство $x^2 + 4y^2 + x^2 y = 4xy + x^2 z$, приведем к виду

$(x^2 - 4xy + 4y^2) + x^2(y - z) = 0$,

$(x - 2y)^2 + x^2(y - z) = 0$. **(1)**

Заметим, что если x, y, z удовлетворяют условиям задачи, то $x \neq 0$ (в противном случае было бы $y = 0$, а тогда, ввиду $y \geq z, 0 \geq z$, а тогда $x + y + z = 0 + 0 + z \leq 0$, в то время как $x + y + z = 1$). Значит, $x^2 > 0$. Но тогда в равенстве (**1**) оба слагаемых неотрицательны, а в сумме дают 0. Это возможно лишь в случае, когда оба слагаемых равны нулю: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

С учетом условия $x + y + z = 1$ получаем ответ $x = \frac{1}{2}, y = z = \frac{1}{4}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}$.

9.5 Найдите число последовательностей из 8 нулей и 2 единиц, в которых единицы не идут подряд.

Решение:

Все последовательности указанного типа устроены следующим образом: имеется последовательность из восьми нулей и девять позиций, две из которых произвольно занимают единицы (см. схему):

_0_0_0_0_0_0_0_0_

Возможные позиции для единиц отмечены черточками.

Число вариантов расстановки двух единиц на девяти позициях определяется из формулы, позволяющей вычислить число сочетаний из девяти по два (формула комбинаторики): $C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$.

Ответ: 36.