

9 класс

9.1 Найдите значение выражения:

$$(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[8]{a})(1 + \sqrt[16]{a})(1 + \sqrt[32]{a})(1 - \sqrt[32]{a}) \text{ при } a = 2014.$$

Решение:

Применяя формулу $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$ последовательно для последних двух множителей, в результате получим:

$$(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a}) = 1 - a.$$

При $a = 2014$ получим $1 - a = 1 - 2014 = -2013$.

Ответ: -2013 .

9.2 При каких значениях a квадратные трехчлены $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$ имеют общий корень?

Решение:

Пусть x_1 – общий корень данных трехчленов, тогда

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = 0 \text{ и } x_1^2 + x_1 + a = 0, \text{ т.е.}$$

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = x_1^2 + x_1 + a \Leftrightarrow ax_1 + 1 = x_1 + a \Leftrightarrow a(x_1 - 1) = x_1 - 1 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(a - 1) = 0.$$

Тогда $a = 1$ или $x_1 = 1$.

Если $a = 1$, то трехчлены оба имеют вид $x^2 + x + 1$ и не имеют действительных корней.

Если $x_1 = 1$, то $1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0$ и $1^2 + 1 + a = 0$. В обоих случаях $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

9.3 Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

Решение:

Запишем условие в следующем виде:

$$a + b = a \cdot b = a : b.$$

Из второго равенства $a \cdot b = a : b$ получаем, что $b^2 = 1$, т.е. $b = +1$ или $b = -1$.

Рассмотрим первое равенство $a + b = a \cdot b$.

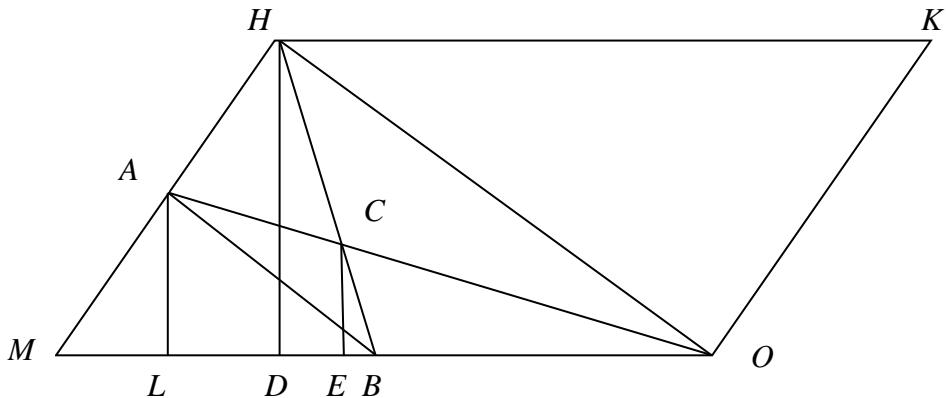
При $b = 1$ оно не имеет решений ($1 = 0$). При $b = -1$ получаем $a = 0,5$.

$$\begin{aligned} a + b &= 0,5 - 1 = -0,5 \\ a \cdot b &= 0,5 \cdot (-1) = -0,5 \\ a : b &= 0,5 : (-1) = -0,5 \end{aligned}$$

Ответ: 0,5 и -1.

9.4 Точки A и B — середины сторон MH и MO параллелограмма $MHKO$. Прямые OA и HB пересекаются в точке C . Найдите площадь четырехугольника $MACB$, если площадь параллелограмма равна 54.

Решение:



Рассмотрим $\triangle MAB$. $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AL$, AL — высота.
Так как B — середина MO , то $MB = \frac{1}{2} MO$.

Проведем высоту HD в параллелограмме $MHKO$. $\triangle MHD$ и $\triangle MAL$ — прямоугольные. Точка A — середина MH , тогда $AL = \frac{1}{2} HD$.

$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MO \cdot \frac{1}{2} HD = \frac{1}{8} MO \cdot HD = \frac{1}{8} \cdot S_{MHKO} = \frac{1}{8} \cdot 54 = \frac{27}{4}$.
 HB и OA медианы $\triangle MHO$, тогда $\frac{HC}{CB} = \frac{2}{1}$ и $HB = 3CB$.

Проведем высоту CE в $\triangle CBO$. HD — высота в треугольнике $\triangle HBO$.

$\triangle CEB \sim \triangle HDB$ ($\angle CBE$ — общий, $\angle CEB = \angle HDB = 90^\circ$), тогда

$$\frac{CE}{HD} = \frac{CB}{HB} = \frac{CB}{3CB} = \frac{1}{3} (HB = 3CB).$$

$$S_{\triangle HBO} = \frac{1}{2} HD \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot HD \cdot \frac{1}{2} MO = \frac{1}{4} MO \cdot HD = \frac{1}{4} \cdot S_{MHKO} = \frac{1}{4} \cdot 54 = \frac{27}{2}.$$

$$S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} CE \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} HD \cdot BO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BO \cdot HD = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle HBO} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$S_{\triangle HCO} = S_{\triangle HBO} - S_{\triangle BCO} = \frac{27}{2} - \frac{9}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$\triangle ACB \sim \triangle OCH$ ($\frac{AC}{CO} = \frac{CB}{CH} = \frac{1}{2}$, так как HB и OA — медианы $\triangle MHO$,

$\angle ACB = \angle OCH$ — вертикальные углы), то $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{4} S_{\triangle OCH} = \frac{9}{4}$.
 $S_{MACB} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle ACB} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9$.

Ответ: 9.

9.5 В сосуд налили 12 литров щелочи и 8 литров воды. Часть этой смеси отлили, а в сосуд долили 10 литров воды. Затем снова отлили из сосуда столько же жидкости, сколько в первый раз. После этого оказалось, что оставшийся в сосуде раствор содержит 5 литров щелочи. Сколько литров смеси отлили из сосуда в первый раз?

Решение:

Было: раствора 20 л, щелочи 12 л, концентрация щелочи $\frac{3}{5}$. После первого отлития и добавления воды стало: раствора $20 - x + 10 = (30 - x)$ л, щелочи $12 - \frac{3}{5}x$, концентрация щелочи $\frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$.

После второго отлития раствора стало: $30 - 2x$, в нем щелочи

$$(30 - 2x) \frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$$

По условию

$$\begin{aligned} (30 - 2x) \frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x} &= 5 \\ 360 - 24x - 18x + \frac{6}{5}x^2 &= 150 - 5x \\ \frac{6}{5}x^2 - 37x + 210 &= 0 \\ x &= \frac{37 \pm \sqrt{361}}{\frac{12}{5}} = \frac{37 \pm 19}{5} \end{aligned}$$

$x_1 = 7,5$ или $x_2 = \frac{70}{3} > 20$ — не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 7,5 л.