

## 9 класс

**9.1** Найдите значение выражения:

$$(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt[4]{a})(1 + \sqrt[8]{a})(1 + \sqrt[16]{a})(1 + \sqrt[32]{a})(1 - \sqrt[32]{a}) \text{ при } a = 2014.$$

Решение:

Применяя формулу  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$  последовательно для последних двух множителей, в результате получим:

$$(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a}) = 1 - a.$$

$$\text{При } a = 2014 \text{ получим } 1 - a = 1 - 2014 = -2013.$$

**Ответ:**  $-2013$ .

**9.2** При каких значениях  $a$  квадратные трехчлены  $x^2 + ax + 1$  и  $x^2 + x + a$  имеют общий корень?

Решение:

Пусть  $x_1$  – общий корень данных трехчленов, тогда

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = 0 \text{ и } x_1^2 + x_1 + a = 0, \text{ т.е.}$$

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = x_1^2 + x_1 + a \Leftrightarrow ax_1 + 1 = x_1 + a \Leftrightarrow a(x_1 - 1) = x_1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - 1)(a - 1) = 0.$$

$$\text{Тогда } a = 1 \text{ или } x_1 = 1.$$

Если  $a = 1$ , то трехчлены оба имеют вид  $x^2 + x + 1$  и не имеют действительных корней.

$$\text{Если } x_1 = 1, \text{ то } 1^2 + a \cdot 1 + 1 = 0 \text{ и } 1^2 + 1 + a = 0. \text{ В обоих случаях } a = -2.$$

**Ответ:**  $a = -2$ .

**9.3** Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

Решение:

Запишем условие в следующем виде:

$$a + b = a \cdot b = a : b.$$

Из второго равенства  $a \cdot b = a : b$  получаем, что  $b^2 = 1$ , т.е.  $b = +1$  или  $b = -1$ .

Рассмотрим первое равенство  $a + b = a \cdot b$ .

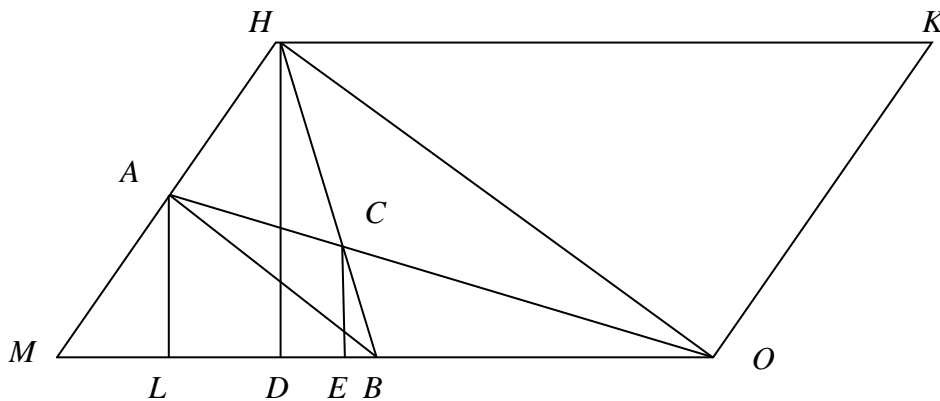
При  $b = 1$  оно не имеет решений ( $1 = 0$ ). При  $b = -1$  получаем  $a = 0,5$ .

$$\begin{aligned}
 a + b &= 0,5 - 1 = -0,5 \\
 a \cdot b &= 0,5 \cdot (-1) = -0,5 \\
 a : b &= 0,5 : (-1) = -0,5
 \end{aligned}$$

**Ответ:** 0,5 и -1.

**9.4** Точки  $A$  и  $B$  — середины сторон  $MH$  и  $MO$  параллелограмма  $MHKO$ . Прямые  $OA$  и  $NB$  пересекаются в точке  $C$ . Найдите площадь четырехугольника  $MASB$ , если площадь параллелограмма равна 54.

Решение:



Рассмотрим  $\triangle MAB$ .  $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AL$ ,  $AL$  — высота.

Так как  $B$  — середина  $MO$ , то  $MB = \frac{1}{2} MO$ .

Проведем высоту  $HD$  в параллелограмме  $MHKO$ .  $\triangle MHD$  и  $\triangle MAL$  — прямоугольные. Точка  $A$  — середина  $MH$ , тогда  $AL = \frac{1}{2} HD$ .

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MO \cdot \frac{1}{2} HD = \frac{1}{8} MO \cdot HD = \frac{1}{8} \cdot S_{MHKO} = \frac{1}{8} \cdot 54 = \frac{27}{4}.$$

$NB$  и  $OA$  медианы  $\triangle MNO$ , тогда  $\frac{NC}{CB} = \frac{2}{1}$  и  $NB = 3CB$ .

Проведем высоту  $CE$  в  $\triangle CBO$ .  $HD$  — высота в треугольнике  $\triangle BHO$ .

$\triangle CEB \sim \triangle HDB$  ( $\angle CBE$  — общий,  $\angle CEB = \angle HDB = 90^\circ$ ), тогда

$$\frac{CE}{HD} = \frac{CB}{HB} = \frac{CB}{3CB} = \frac{1}{3} \quad (NB = 3CB).$$

$$S_{\triangle HBO} = \frac{1}{2} HD \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot HD \cdot \frac{1}{2} MO = \frac{1}{4} MO \cdot HD = \frac{1}{4} \cdot S_{MHKO} = \frac{1}{4} \cdot 54 = \frac{27}{2}.$$

$$S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} CE \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} HD \cdot BO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BO \cdot HD = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle HBO} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$S_{\triangle HCO} = S_{\triangle HBO} - S_{\triangle BCO} = \frac{27}{2} - \frac{9}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$\triangle ACB \sim \triangle OCH$  ( $\frac{AC}{CO} = \frac{CB}{CH} = \frac{1}{2}$ , так как  $NB$  и  $OA$  — медианы  $\triangle MNO$ ,

$$\angle ACB = \angle OCH \text{ — вертикальные углы), то } S_{\triangle ACB} = \frac{1}{4} S_{\triangle OCH} = \frac{9}{4}.$$

$$S_{MACB} = S_{\triangle MAB} + S_{\triangle ACB} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} = 9.$$

**Ответ:** 9.

**9.5** В сосуд налили 12 литров щелочи и 8 литров воды. Часть этой смеси отлили, а в сосуд долили 10 литров воды. Затем снова отлили из сосуда столько же жидкости, сколько в первый раз. После этого оказалось, что оставшийся в сосуде раствор содержит 5 литров щелочи. Сколько литров смеси отлили из сосуда в первый раз?

Решение:

Было: раствора 20 л, щелочи 12 л, концентрация щелочи  $\frac{3}{5}$ . После первого отлития и добавления воды стало: раствора  $20 - x + 10 = (30 - x)$  л, щелочи  $12 - \frac{3}{5}x$ , концентрация щелочи  $\frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$ .

После второго отлития раствора стало:  $30 - 2x$ , в нем щелочи

$$(30 - 2x) \frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x}$$

По условию

$$(30 - 2x) \frac{12 - \frac{3}{5}x}{30 - x} = 5$$

$$360 - 24x - 18x + \frac{6}{5}x^2 = 150 - 5x$$

$$\frac{6}{5}x^2 - 37x + 210 = 0$$

$$x = \frac{37 \pm \sqrt{361}}{\frac{12}{5}} = \frac{37 \pm 19}{\frac{12}{5}}$$

$x_1 = 7,5$  или  $x_2 = \frac{70}{3} > 20$  — не удовлетворяет условию задачи.

**Ответ:** 7,5 л.