9 класс

9.1 Если в многочлен ax^3+bx^2+cx+d вместо *a, b, c, d* подставлять числа -7, 4, -3, 6 в каком угодно порядке, будут получаться многочлены с одной переменной. Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.

Решение:

Заметив, что -7 + 4 + (-3) + 6 = 0 независимо от порядка следования слагаемых (переместительный закон сложения действительных чисел), утверждаем, что $x=1$ – корень каждого многочлена, получаемого из данного путем подстановки вместо *a, b, c, d* чисел -7, 4, -3, 6 в каком угодно порядке.

Ответ: $x=1$.

9.2 Упростите выражение

$$\frac{\left(a^2-\frac{1}{c^2}\right)^a\left(a-\frac{1}{c}\right)^{c-a}}{\left(c^2-\frac{1}{a^2}\right)^c\left(c+\frac{1}{a}\right)^{a-c}}.$$

Укажите допустимые значения переменных.

Решение:

$$\frac{\left(a^2-\frac{1}{c^2}\right)^a\left(a-\frac{1}{c}\right)^{c-a}}{\left(c^2-\frac{1}{a^2}\right)^c\left(c+\frac{1}{a}\right)^{a-c}}=\frac{\left(\frac{a^2c^2-1}{c^2}\right)^a\left(\frac{ac-1}{c}\right)^{c-a}}{\left(\frac{a^2c^2-1}{a^2}\right)^c\left(\frac{ac+1}{a}\right)^{a-c}}=$$

$$=\frac{a^{2c}(a^2c^2-1)^a a^{a-c}(ac-1)^{c-a}}{c^{2a}(a^2c^2-1)^c c^{c-a}(ac+1)^{a-c}}=$$

$$=\frac{a^{a+c}}{c^{a+c}}(a^2c^2-1)^{a-c}(a^2c^2-1)^{c-a}=\left(\frac{a}{c}\right)^{a+c}.$$

Теперь найдем допустимые значения переменных в данном выражении. Очевидно, оно имеет смысл, если

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ c \neq 0, \\ a^2 - \dfrac{1}{c^2} > 0, \\ a - \dfrac{1}{c} > 0, \\ c^2 - \dfrac{1}{a^2} > 0, \\ c + \dfrac{1}{a} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ c \neq 0, \\ a + \dfrac{1}{c} > 0, \\ a - \dfrac{1}{c} > 0, \\ c - \dfrac{1}{a} > 0, \\ c + \dfrac{1}{a} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ c > 0, \\ ac > 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{a}{c}\right)^{a+c}$, $a > 0,\ c > 0,\ ac > 1.$

9.3 Решите уравнение с двумя переменными

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + y - 4\sqrt{y} + 7 = 0.$$

Решение:
Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив в ней полные квадраты.

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + y - 4\sqrt{y} + 4 = 0,$$
$$(x + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{y} - 2)^2 = 0.$$

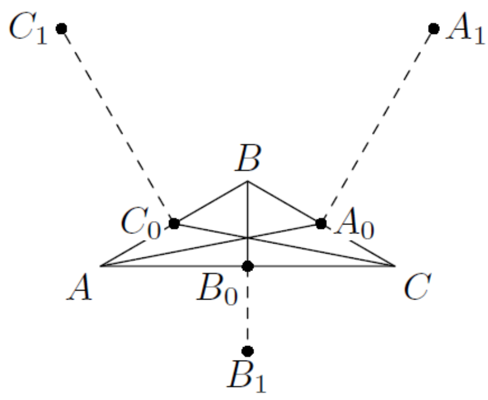
Полученное равенство возможно только тогда, когда

$x + \sqrt{3} = 0$ и $\sqrt{y} - 2 = 0$. Откуда находим $x = -\sqrt{3}$ и $y = 4$.

Ответ: $x = -\sqrt{3}$, $y = 4$.

9.4 Медиану AA_0 треугольника ABC отложили от точки A_0 перпендикулярно стороне BC во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через A_1. Аналогично строятся точки B_1 и C_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если углы треугольника ABC равны $30^\circ, 30^\circ$ и 120°.

Решение:



Так как треугольник ABC равнобедренный, то BB_0 – серединный перпендикуляр в основанию AC. Значит, B_1 лежит на этом перпендикуляре и $CB_0 \perp BB_1$. В треугольнике BCB_1 точка B_0 – основание высоты и медианы на стороне BB_1, откуда $BC = B_1C$, а так как $\angle B_1BC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$. Значит, треугольник B_1BC – равносторонний, а A_0 будучи серединой стороны BC является основанием высоты в треугольнике B_1BC. Получается, что точки A_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Аналогично, C_1 и B_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Значит, $\angle C_1B_1A_1 = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$,
$B_1A_1 = B_1A_0 + A_0A_1 = B_1A_0 + A_0A = B_1C_0 + C_0C_1 = B_1C_1$, то есть треугольник $A_1B_1C_1$ – равнобедренный с углом при вершине 60°.

Ответ: все углы по 60°.

9.5 Рюкзак стоит 2000 рублей. У Пети имеется

$$400^5 - 399^2 \cdot (400^3 + 2 \cdot 400^2 + 3 \cdot 400 + 4) \text{ рублей.}$$

Достаточно ли у Пети денег на рюкзак?

Решение:

Пусть $n = 400$. Тогда

$$n^5 - (n-1)^2(n^3 + 2n^2 + 3n + 4) = n^5 - (n^2 - 2n + 1)(n^3 + 2n^2 + 3n + 4) =$$
$$= n^5 - (n^5 + 2n^4 + 3n^3 + 4n^2 - 2n^4 - 4n^3 - 6n^2 - 8n + n^3 + 2n^2 + 3n + 4).$$

Приводя подобные слагаемые, получим:

$$n^5 - (n^5 - 5n + 4) = 5n - 4.$$

Но $5 \cdot 400 - 4 = 1996 < 2000$.

Ответ: денег на рюкзак не хватит.