9 класс

9.1 Запишем рациональные положительные числа в виде последовательности:

$$\frac{1}{1};\quad \frac{2}{1},\frac{1}{2};\quad \frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3};\quad \frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\ldots\ldots$$

Найдите номер места, на котором стоит число $\frac{216}{201}$.

Решение:

Заметим, что у первого члена сумма числителя и знаменателя равна 2, у двух следующих – 3, у трех – 4, у четырех – 5 и т.д. Наше число стоит на 201 месте в группе чисел с суммой числителя и знаменателя, равной 417. Количество чисел до этой группы равно

$1+2+3+\ldots+(417-2)=1+2+3+\ldots+415=\frac{1+415}{2}\cdot 415=208\cdot 415=86320$ (с суммой 416 в группе 415 слагаемых). Отсюда $n=86320+201=86521$.

Ответ: 86521.

9.2 Найдите все натуральные n, при которых число $7n + 5$ делится на число $3n$–1.

Решение:

Здесь прямолинейное деление делимого на делитель «углом» не проходит, так как число 7/3 не является целым. Попробуем обходной путь. Если дробь $\frac{7n+5}{3n-1}$ равна натуральному числу, то и утроенная дробь

$$\frac{3(7n+5)}{3n-1}=\frac{21n+15}{3n-1}$$

равна натуральному числу. Обратное утверждение также верно, поскольку числа 3 и $3n-1$взаимно просты. Теперь уже можно применять или деление «углом», или прием «плюс-минус», во втором случае необходимо знать, какое слагаемое нужно выделять в числителе последней дроби. Очевидно, слагаемое, равно

$$(3n-1)\cdot 7=21n-7.$$

$$\frac{21n+15}{3n-1}=\frac{(21n-7)+22}{3n-1}=7+\frac{22}{3n-1}.$$

Осталось перебрать случаи, когда $3n-1$ равно 1, 2, 11 и 22.

Ответ: 1, 4.

9.3 Решите уравнение $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Решение:

Воспользуемся подстановкой $y=x+4,\quad x+3=y-1,\quad x+5=y+1$, тогда данное уравнение примет вид

$$(y-1)^4+(y+1)^4=16$$

Преобразуем его

$$((y-1)^2-(y+1)^2)^2+2(y-1)^2(y+1)^2=16,$$

$$(-2\cdot 2y)^2+2(y^2-1)^2=16,$$

$$16y^2+2(y^4-2y^2+1)=16,$$

$$y^4+6y^2-7=0,$$

$$(y^2-1)(y^2+7)=0,$$

где $y^2+7>0$ для любого y. Значит, $y^2-1=0,\quad y=\pm 1$.

Возвращаясь к подстановки, находим $x_1=-3,\quad x_2=-5$.

Ответ. -3, -5.

9.4 В одном подсобном хозяйстве были коровы, лошади и куры. Их количества выражались соответственно тремя разными простыми числами. Известно также, что если число коров умножить на общую численность коров и лошадей, то полученный результат будет на 120 больше числа кур. Сколько было коров, лошадей и кур?

Решение:

Пусть число коров – x, лошадей – y, кур – z.

Тогда из условия $x(x+y)=z+120$. Из этого уравнения следует, что z не может равняться 2, так как 122 разлагается только на 2 сомножителя 2 и 61, следовательно, если $z=2$, то x тоже должно быть равно 2. А это противоречит условию задачи.

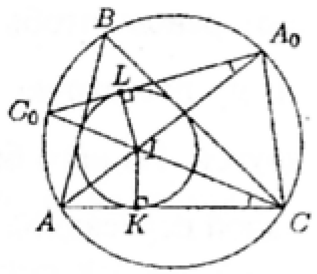
2 – единственное простое четное число. Следовательно, z должно быть нечетным. Нечетной будет и сумма $z+120$. Эта сумма равна произведению $x(x+y)$. Значит, оба сомножителя должны быть нечетными. Отсюда следует, что или x, или y должно быть четным числом (иначе сумма $(x+y)$ будет четным числом). x не может равняться 2 (тогда произведение будет четным). Таким образом, $y=2$. Получаем уравнение $x^2+2x-120=z$ или $(x-10)(x+12)=z$.

Поскольку по условию z – простое число, значит, один из сомножителей должен равняться 1. Очевидно, $x-10=1$ или $x=11$. Тогда $z = 23$.

Ответ: коров 11, лошадей 2, кур 23.

9.5 Около треугольника *ABC* описана окружность. Пусть A_0 и C_0 – соответственно середины ее дуг *BC* и *AB*, не содержащих вершин *A* и *C*. Оказалось, что отрезок A_0C_0 касается окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Найдите угол *B*.

Решение:



Обозначим вписанную окружность треугольника *ABC* через ω, ее центр I, точки касания окружности с *AC* и A_0C_0 – через K и L соответственно. Тогда в треугольниках *IKC* и ILA_0 углы *IKC* и ILA_0 – прямые (как углы между радиусом и касательной), и $IK = IL$, так как оба эти отрезка – радиусы окружности. Также, поскольку точки A, I, A_0 лежат на биссектрисе угла A, а точки C, I, C_0 – на биссектрисе угла *C*, то $\angle ICK = \angle C_0CA = \angle C_0A_0A = \angle LA_0I$ (так как углы $\angle C_0CA, \angle C_0A_0A$ опираются на одну дугу описанной окружности C_0A). Поэтому прямоугольные треугольники *IKC* и ILA_0 равны по катету и острому углу, следовательно, $IA_0 = IC$, то есть треугольник IA_0C – равнобедренный.

Далее

$$\angle A_0IC = \frac{1}{2}(\cup AC_0 + \cup A_0C) = \frac{1}{2}(\cup BC_0 + \cup A_0B) = \frac{1}{2}(\cup A_0BC_0) = \angle A_0CC_0,$$

следовательно, $\angle A_0IC = \angle A_0CI$ и $IA_0 = A_0C$. Значит, треугольник IA_0C – равносторонний. Отсюда $\angle ABC = \angle AA_0C = 60^\circ$.

Ответ: 60°.