9 класс

9.1 Докажите справедливость неравенства
$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z,$$
для всех положительных x, y, z.

Решение:

Применим формулу
$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$
истинную для всех положительных значений a и b.
$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}}=y;$$
$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{zx}{y}}=x;$$
$$\frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}}=z.$$
Сложим почленно получившиеся неравенства:
$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2}+\frac{\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}}{2}+\frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}}{2}\geq x+y+z$$
$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z$$
Доказано.

9.2 Решите уравнение $(x^2-x-1)^2-x^3=5$.

Решение:

$(x^2-x-1)^2-4=x^3+1.$

Тогда $(x^2-x-3)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x+1),$

$(x^2-x+1)(x^2-2x-4)=0,$

$x=1\pm\sqrt{5}.$

Ответ: $x=1\pm\sqrt{5}.$

9.3 Вычислите $tg1^0 \cdot tg2^0 \cdot \ldots \cdot tg88^0 \cdot tg89^0$.

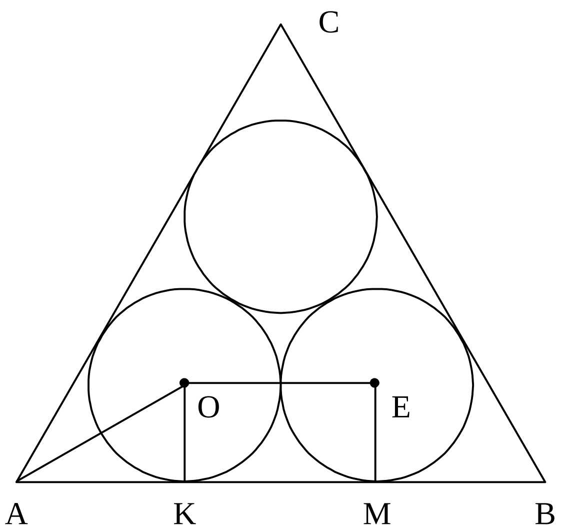
Решение:
С учетом того, что $tg(90^0 - x) = ctgx, tgx \cdot ctgx = 1, tg45^0 = 1$, получим:

$$tg1^0 \cdot tg2^0 \cdot \ldots \cdot tg44^0 \cdot tg45^0 \cdot tg46^0 \cdot \ldots \cdot tg88^0 \cdot tg89^0 =$$
$$= tg1^0 \cdot tg2^0 \cdot \ldots \cdot tg44^0 \cdot tg45^0 \cdot ctg44^0 \cdot \ldots \cdot ctg2^0 \cdot ctg1^0 = 1.$$

Ответ: 1.

9.4 В равносторонний треугольник со стороной, равной *a,* вписаны три окружности одинакового радиуса так, что каждая окружность касается двух сторон треугольника и двух других окружностей. Найдите радиус окружностей.

Решение:



Пусть искомый радиус равен r. Очевидно, что $KM = 2r$. Так как точка O лежит на биссектрисе угла BAC, то угол KAO равен 30^0. Из KAO находим $AK = r\sqrt{3}$. Ясно, что $MB = AK = r\sqrt{3}$. Тогда сторона AB равна $r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(\sqrt{3}+1)$. Из соотношения $2r(\sqrt{3}+1) = a$ находим $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Ответ: $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}$.

9.5 Студент Петя на каникулах подрабатывает укладкой тротуарной плитки. У него в распоряжении имеется менее 1000 плиток. Если он выложит широкую дорожку по 29 плиток в каждом ряду, то у него останется 11 плиток; если же он выложит узкую дорожку по 23 плитки в каждом ряду, то у него останется 5 плиток. Сколько плиток у Пети?

Решение:

Пусть L – число плиток у Пети, m – число рядов в широкой дорожке, а n – число рядов в узкой дорожке $L, m, n \in N$. По условию

$$L = 29m + 11 = 23n + 5,$$

$$23m - 23n + 6m + 11 - 5 = 0,$$

$$23(m - n) + 6m + 6 = 0,$$

$$23(n - m) = 6(m + 1)$$

$$n - m = \frac{6(m + 1)}{23}$$

Заметим, что число $n - m$ является натуральным, поэтому $m + 1$ должно делиться на 23 нацело. Преобразуем

$$L = 29m + 11 = 29m + 29 - 18 = 29(m + 1) - 18$$

Отсюда $29(m + 1) = L + 18$. Так как $L < 1000$, то $29(m + 1) < 1018$. Учитывая, что $m + 1 \in N$, получим $m + 1 < 36$. Единственное натуральное число, которое делится на 23 и удовлетворяет этому условию и есть 23. Таким образом, $m = 23$.

Тогда $L = 29 \cdot 23 + 11 = 678$ – плиток у Пети.

Ответ: 678 плиток.