8 класс

8.1 Решите уравнение: $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

Решение:
Применим формулу суммы кубов для обеих частей уравнения.

$$\big((x-1)+(2x+3)\big)\big((x-1)^2-(x-1)(2x+3)+(2x+3)^2\big)$$
$$=(3x+2)(9x^2-6x+4);$$
$$(3x+2)(3x^2+9x+13)=(3x+2)(9x^2-6x+4);$$
$$(3x+2)(3x^2+9x+13-9x^2+6x-4)=0;$$
$$(3x+2)(-6x^2+15x+9)=0;$$

Отсюда $3x+2=0$ или $-6x^2+15x+9=0$.
Находим

$$x_1=-\frac{2}{3}.$$

или

$$-2x^2+5x+3=0.$$
$$x_2=3, x_3=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=3, x_3=-\frac{1}{2}$.

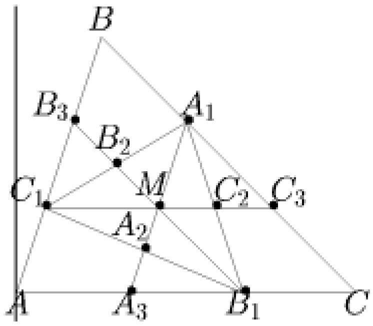
8.2 Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, …, при делении на 10 дает в остатке 9.

Решение:
Обозначим искомое число x . Тогда $x+1=\text{НОК}(2,3,\dots,9,10)=2520$. Следовательно, искомое число равно 2519.

Ответ: 2519.

8.3 На сторонах *BC*, *CA*, *AB* треугольника *ABC* выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что медианы A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны прямым *AB*, *BC*, *CA*. Определите, в каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника *ABC*.

Решение:



Пусть M – точка пересечения медиан $\Delta A_1B_1C_1$ и A_3, B_3, C_3 – точки, в которых продолжения медиан пересекают стороны ΔABC (см. рис). Из условия следует, что MC_3CB_1 – параллелограмм, поэтому $MC_3 = CB_1$.
Далее, прямая C_1C_3 проходит через середину отрезка A_1B_1 и параллельна AC, поэтому MC_3 – средняя линия ΔA_3A_1C. Тогда $A_3C = 2MC_3, A_3B_1 = B_1C$. Но A_2A_3 – средняя линия ΔAB_1C_1, то $AA_3 = A_3B_1$, значит, $AA_3 = A_3B_1 = B_1C$ и точка B_1 делит сторону AC в отношении 2:1, считая от вершины A. Аналогично, $CA_1:A_1B = BC_1:C_1A = 2:1$.

Ответ: $AB_1:B_1C = CA_1:A_1B = BC_1:C_1A = 2:1$.

8.4 Первоклассник и девятиклассник вышли одновременно из одного дома в школу. У первоклассника шаг на 20 % короче, чем у девятиклассника, но зато он успевал за тоже время делать на 20 % шагов больше, чем девятиклассник. Кто из них пришел в школу раньше?

Решение:
Пусть x – длина шага у девятиклассника, тогда у первоклассника она равна $0{,}8x$. Пусть девятиклассник за единицу времени делает y шагов, тогда первоклассник за эту же единицу времени делает $1{,}2y$ шагов. Таким образом, за единицу времени девятиклассник проходит расстояние xy, а первоклассник $0{,}96xy$. Из того, что $xy > 0{,}96xy$, делаем вывод: девятиклассник затратит на дорогу времени меньше.

Ответ: девятиклассник пришел в школу раньше.

8.5 Известно, что $\frac{b+2c-a}{2bc} + \frac{a+2c-b}{2ac} = \frac{a+b-2c}{ab}$.
Найдите значение выражения $\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2}$.

Решение:

Данное в условии равенство преобразуется к виду $(a - b)^2 = 4c^2$. Тогда $a^2 + b^2 = 4c^2 + 2ab$ и, следовательно, $\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$.