8 класс

8.1. Три числа x, y, z удовлетворяют соотношению $x^2+y^2=xy\left(z+\frac{1}{2}\right)$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x или y ровно произведению двух других чисел.

Решение:

Выполним преобразования:

$x^2+y^2=xy(z+\frac{1}{z})$,

$(x^2-xyz)+\left(y^2-\frac{xy}{z}\right)=0$,

$x(x-yz)+y\left(y-\frac{x}{z}\right)=0$,

во второй части выражения вынесем за скобку $\left(-\frac{1}{z}\right)$:

$x(x-yz)-\frac{y}{z}(x-yz)=0$,

теперь вынесем за скобку $(x-yz)$:

$(x-yz)\left(x-\frac{y}{z}\right)=0$,

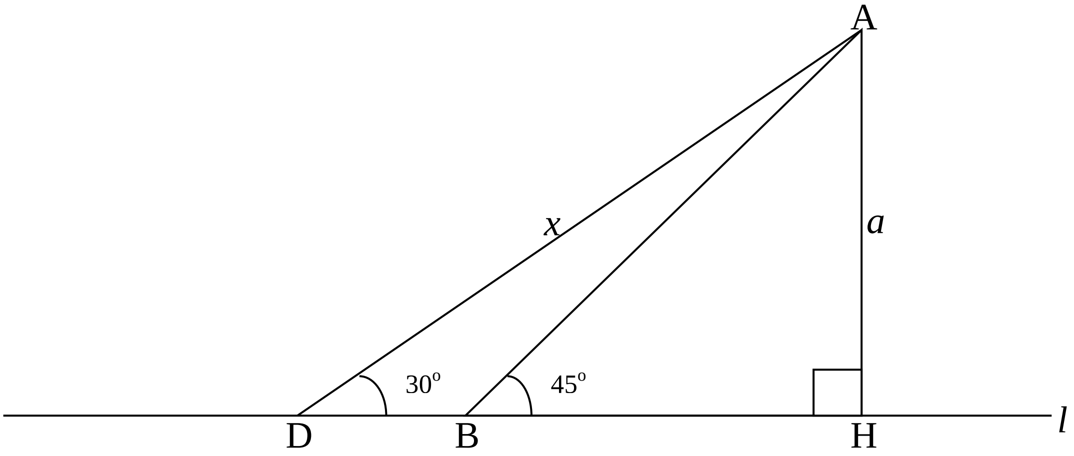
Поэтому либо $x-yz=0$, т.е. $x=yz$, либо $x-\frac{y}{z}=0$, т.е. $y=xz$.

Доказано.

8.2 Из точки A к прямой l проведены две наклонные: AB и AD. Угол наклона AB к l составляет 45°, а угол наклона AD к l – 30°. Найдите AD, если AB=5.

Решение:

См. рисунок.



Угол HAB равен 45°. Треугольник AHB – равнобедренный: AH=BH=a. По теореме Пифагора $a^2 + a^2 = 5^2$, $2a^2 = 5^2$, $a = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. В прямоугольном треугольнике AHD катет AH лежит против угла 30° и, значит, равен половине гипотенузы AD=x. Таким образом, $\frac{x}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $x = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

8.3 При каких целых значениях a система $\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ x - 3y = 2. \end{cases}$ имеет решение (x_0, y_0), где x_0 – целое число?

Решение:

Решим систему в общем виде при целых значениях a. Первое уравнение умножим на 3, второе – на 2 и сложим получившиеся уравнения:

$$3(ax + 2y) + 2(x - 3y) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2,$$

$$(3a + 2)x = 7.$$

Число $3a + 2$ отлично от нуля (и, к тому же, нечетно), поэтому $x = \frac{7}{3a+2}$, (можно найти и y: $y = \frac{1}{3}(x - 2)$, но нам это не нужно). Мы ищем только целые a. Равносильно: $3a + 2$ должно быть делителем числа 7. Возможные варианты: $3a + 2 = -7,\ 3a + 2 = -1,\ 3a + 2 = 1,\ 3a + 2 = 7.$ Отсюда находим два целых значения a: $a = -3$ и $a = -1$.

Ответ: – 3 и – 1.

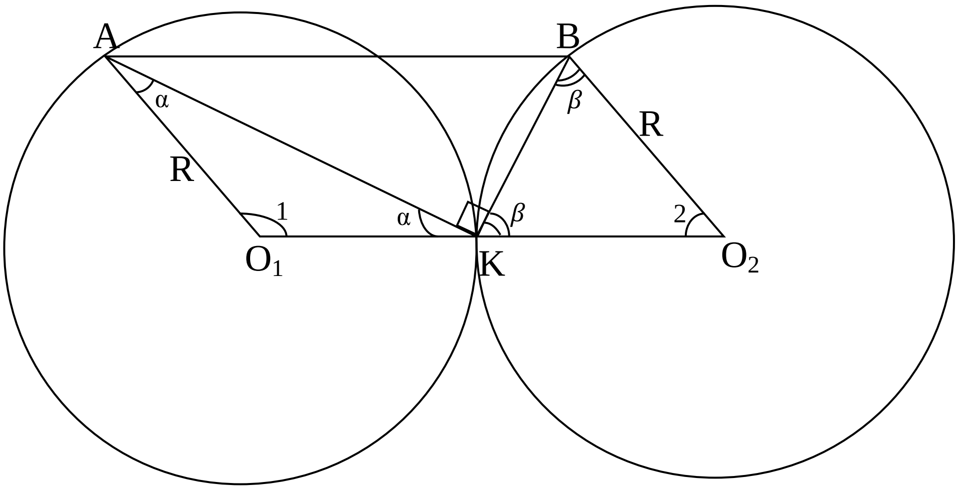
8.4 Две окружности радиуса R касаются друг друга в точке K. Точка A лежит на одной окружности, точка B – на другой, угол AKB – прямой. Докажите, что длина отрезка AB равна $2R$.

Решение:

См. рисунок.

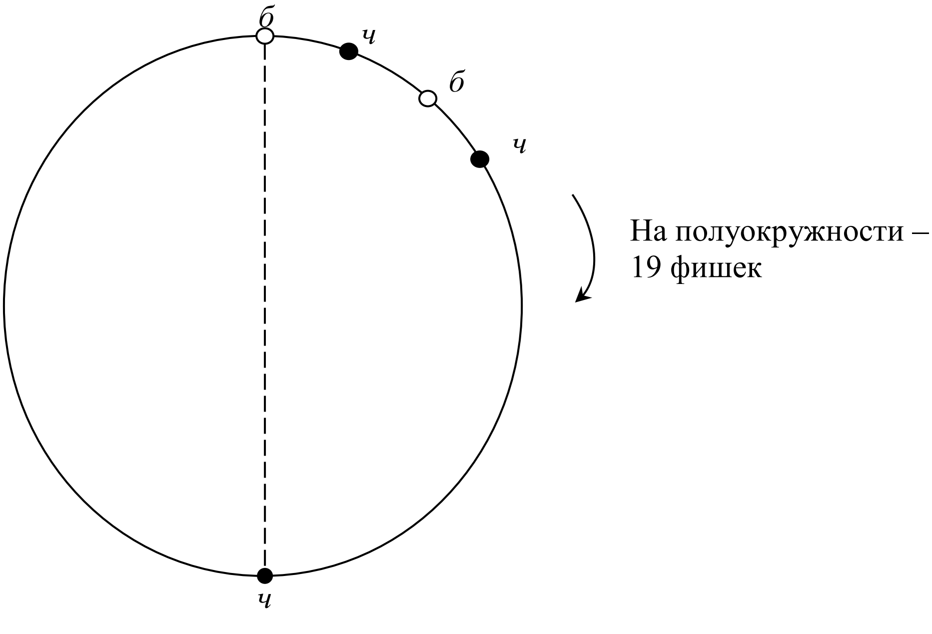
Докажем, что O_1ABO_2 – параллелограмм. Для этого достаточно доказать, что ∠1+∠2=180°. Ясно, что $\alpha + \beta = 90^0$ (посмотрите на углы с вершиной K). Треугольник AO_1K – равнобедренный, поэтому $\angle 1 = 180^0 - 2\alpha$. Аналогично, $\angle 2 = 180^0 - 2\beta$. Теперь находим: $\angle 1 + \angle 2 = 180^0 - 2\alpha + 180^0 - 2\beta = 360^0 - 2(\alpha + \beta) = 360^0 - 2 \cdot 90^0 = 180^0$.

Доказано.



8.5 Можно ли расставить по окружности 20 белых и несколько черных фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной белой фишке, стояла черная и никакие две черные фишки не стояли рядом?

Решение:
См. рисунок.



Предположим, что фишки указанным образом расставить можно. Понятно, что тогда белые и черные фишки чередуются (за черной следует белая, а за белой не может следовать белая, так как тогда противоположные черные фишки стояли бы рядом). Приходим к выводу, что общее количество фишек на окружности равно 40.

На полуокружности между белой и противоположной ей черной фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих 19 фишек – одноцветные, а они должны быть разноцветными, как соседние – одна с белой, другая – с черной. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек невозможна.

Ответ: нельзя.