8 класс

8.1 Упростите выражение

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1).$$

Решение:

В рассматриваемом выражении первый множитель равен 3. Его можно представить в виде (2^2-1).

Таким образом, исходное выражение преобразуется к виду:

$$(2^2-1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1).$$

Далее, применяя формулу разности квадратов, получим:

$$(2^2-1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1)=$$
$$=((2^2-1)\cdot(2^2+1))\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1)=$$
$$=((2^4-1)\cdot(2^4+1))\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1)=$$
$$=((2^8-1)\cdot(2^8+1))\cdot(2^{16}+1)\cdot(2^{32}+1)=$$
$$=((2^{16}-1)\cdot(2^{16}+1))\cdot(2^{32}+1)=$$
$$=((2^{32}-1)\cdot(2^{32}+1))=2^{64}-1.$$

Ответ: $2^{64}-1$.

8.2 Докажите, что p^2-1 кратно 24, если p – простое число, большее 3.

Решение:

Так как p – простое число, большее 3, то p – нечетное число, и p не делится на 3.

Данное выражение представим в виде произведения $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Так как $p-1$ и $p+1$ – последовательные четные числа, то одно из них всегда делится на 4, а второе – на 2. Следовательно, p^2-1 делится на 8.

Рассмотрим произведение из трех последовательных натуральных чисел $p-1,\ p,\ p+1$:

$$(p-1)p(p+1).$$

Данное выражение всегда делится на 3, а так как по условию задачи p не делится на 3, то произведение $(p-1)(p+1)$ обязательно делится на 3. Так как 8 и 3 взаимно простые числа, то p^2-1 делится на их произведение $8\cdot 3=24$.
Доказано.

8.3 Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению
$$x^2-y^2=69.$$

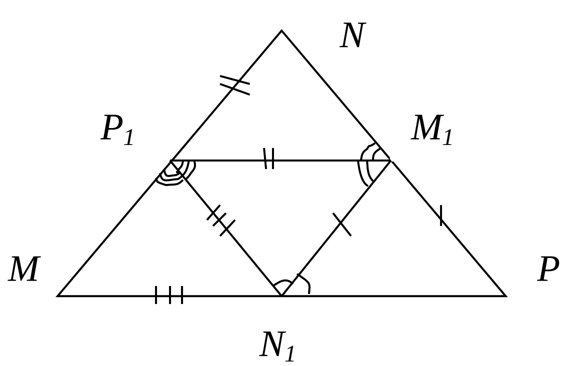
Решение:
Перепишем данное уравнение в виде $(x-y)(x+y)=69$. так x и y – натуральные числа, то из последнего уравнения следует, что $x>y, x+y>x-y$ и что $x+y, x-y$ также натуральные числа. Число 69 можно представить в виде произведения двух натуральных убывающих множителей таким образом: $69=23\cdot 3=69\cdot 1$. Отсюда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем уравнений
$$\begin{cases} x+y=23, \\ x-y=3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=69, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Решая полученные системы, найдем $x=13, y=10$ или $x=35, y=34$.

Ответ: $x=13, y=10$ или $x=35, y=34$.

8.4 На сторонах *MN, NP, MP* треугольника *MNP* взяты соответственно точки P_1, M_1, N_1 . Оказалось, что угол $P_1N_1M_1$равен углу M_1N_1P, угол $N_1M_1P_1$ равен углу P_1M_1N, угол $M_1P_1N_1$ равен углу N_1P_1M, $N_1M_1 = M_1P$, $M_1P_1 = P_1N$, $P_1N_1= N_1M$. Найдите углы треугольника *MNP*.

Решение:



Пусть в треугольнике MNP $\angle M_1N_1P=\alpha, \angle P_1M_1N=\beta, \angle N_1P_1M=\gamma$. Так как $M_1N_1=M_1C$, то в равнобедренном треугольнике PM_1N_1 углы при основании равны, то есть $\angle M_1N_1P=\angle M_1PN_1=\alpha$.
$\angle N_1M_1N=2\beta$ внешний угол треугольника PM_1N_1, а значит $\angle NM_1N_1=2\alpha$. Из этого следует, что $2\beta=2\alpha$ и $\beta=\alpha$.
Аналогично $\angle P_1NM_1=\angle P_1M_1N=\beta$.
$\angle M_1P_1M=2\gamma, \angle M_1P_1M=2\beta \Rightarrow 2\gamma=2\beta \Rightarrow \gamma=\beta$.
А из равнобедренного треугольника MN_1P_1 следует, что
$\angle N_1MP_1=\angle N_1P_1M=\gamma$ и $\gamma=\alpha$.
Таким образом, все углы треугольника MNP равны, поэтому треугольник равносторонний и углы в нем 60°.

Ответ: все углы по 60°.

8.5 Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ним число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором – 1?

Решение:
Исходя из условия, на третьем месте должен стоять делитель числа 37 + 1 = 38, отличный от единицы, поскольку она уже стоит на втором месте. Остаются два варианта: 19 и 2.
Пусть на последнем месте в строке стоит число *x*. По условию сумма всех чисел в строке, кроме *x*, делится на *x*. Но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1+2+...+37$, тоже делится на *x*. Легко убедиться, что справедливо равенство: $1+2+...+37=37\cdot 19$. Например, потому что $37\cdot 19$ – это произведение количества слагаемых на их среднее арифметическое. Заметим, что 37 и 19 – простые числа, поэтому сумма $1+2+...+37$ делится только на четыре числа: 1, 19, 37 и $37\cdot 19=703$.
Отсюда $x=19$, так как по условию 37 уже поставлено на первое место, а 1 – на второе. Таким образом, последним числом в строке обязательно должно быть 19. Следовательно, на третьем месте стоит число 2.

Ответ: 2.