

8 класс

8.1 Четно или нечетно произведение

$$(7a + b - 2c + 1) \cdot (3a - 5b + 4c + 10),$$

где числа a, b, c – целые?

Решение:

Можно перебирать случаи, связанные с четностью или нечетностью чисел a, b и c (8 случаев), но проще поступить иначе. Сложим множители:

$$(7a + b - 2c + 1) + (3a - 5b + 4c + 10) = 10a - 4b + 2c + 11.$$

Так как полученная сумма нечетна, то один из множителей данного произведения четен, а другой нечетен. Следовательно, само произведение четно.

Ответ: четно.

8.2 Упростите выражение

$$\left((x^6 + 2x^2) \cdot \left(\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{4}{x^8 - 2x^{12}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2.$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \left((x^6 + 2x^2) \cdot \left(\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{4}{x^8 - 2x^{12}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ & = \left(x^2(x^4 + 2) \cdot \left(\frac{1 - 2x^4}{4x^4} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{4}{x^8(1 - 2x^4)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ & = \left(x^2(x^4 + 2) \cdot \frac{(1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2x^2} - \frac{x^4(1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{(x^4 + 2) \cdot (1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^4(1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{x^4 \cdot (1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot (1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^4(1 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= (1 - 2x^4)^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 1 - 2x^4.$$

Ответ: $1 - 2x^4$.

8.3 Найдите все значения цифры a , если число $\overline{875a}$ делится на 6.

Решение:

Так как это число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3 и обратно. Применим признак делимости на 3. Для этого найдем сумму цифр числа:

$$8 + 7 + 5 + a = 20 + a.$$

Из делимости $(20 + a) : 3$ следует, что цифра a равна 1, 4 или 7. Но по признаку делимости на 2 эта цифра должна быть четной, поэтому подходит только $a = 4$.

Ответ: 4.

8.4 Незнайка написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) сумму этих чисел на их произведение. После этого Незнайка стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался в 3 раза больше первого. Какое число Незнайка стер?

Решение:

Пусть a – стертое число, S – сумма оставшихся, Π – произведение оставшихся. Тогда

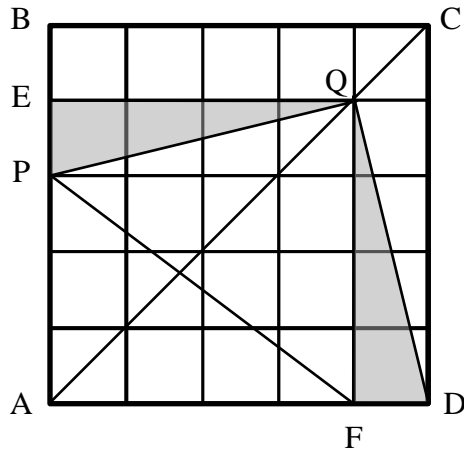
$$3 \cdot \frac{a + S}{a\Pi} = \frac{S}{\Pi} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{S}.$$

Так как $a < S$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{6}$, т. е. $a = 4$ или $a = 5$. Случай $a = 5$ невозможен, так как при этом $S = 7,5$. Случай $a = 4$ возможен: $S = 12$ и написанными Незнайкой числами могут быть 4, 5 и 7.

Ответ: 4.

8.5 Дан квадрат $ABCD$. На стороне AB и на диагонали AC взяты соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 3:2$, $AQ : QC = 4:1$. Найдите углы треугольника PQD .

Решение:



Разрежем квадрат $ABCD$ на 25 меньших квадратиков (рисунок). В силу условий задачи точки P и Q окажутся вершинами некоторых из этих квадратиков. Так как $\triangle PEQ = \triangle DFQ$, как прямоугольные по двум катетам, то $PQ = DQ$ и $\angle PQE = \angle DQF$.

Отсюда $\angle PQD = \angle EQF - \angle PQE + \angle DQF = \angle EQF = 90^\circ$.

Таким образом, $\triangle PQD$ – равнобедренный и прямоугольный, $\angle QPD = \angle QDP = 45^\circ$.

Ответ: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.