## 8 класс

**8.1** Докажите, что если $x \geq -1$, то $3x + 5 \geq \frac{33x+19}{3x+4}$.

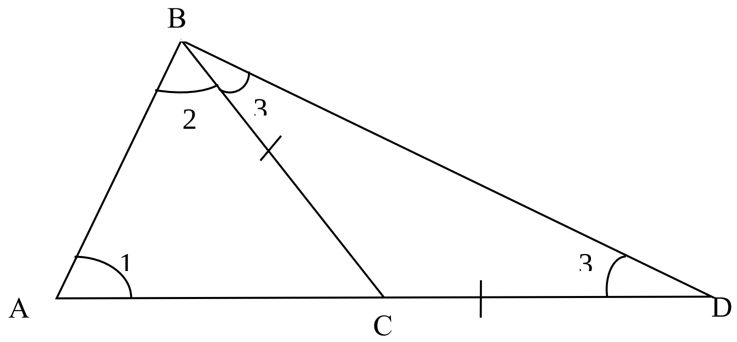
Решение:

Так как $x \geq -1$, то $3x + 4 \geq -3 + 4 = 1 > 0$, и неравенство $3x + 5 \geq \frac{33x+19}{3x+4}$ можно умножить на $3x + 4$: $(3x + 5)(3x + 4) \geq 33x + 19$, $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$, $(3x - 1)^2 \geq 0$. Последнее неравенство очевидно (квадрат любого числа неотрицателен). Утверждение доказано.

**8.2** На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что CD=CB. Докажите, что угол ABD не острый.

Решение:

См. рис.




Из треугольника ABD: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 = 180°$.

Из треугольника ABC: $\angle 2 \geq \angle 1$, т.к. AC – наибольшая сторона (против большей стороны лежит больший угол), поэтому

$\angle 2 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 3 \geq 180°$,

$\angle 2 + \angle 3 \geq 90°$, что и требовалось доказать.

**8.3** Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, причем $|b| > 2$, Докажите, что уравнение $ax^2 + abcx + c = 0$ имеет корни.

Решение:

Заметим сначала, что $a \neq 0$ (иначе уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имело бы корень $x = -\frac{c}{b}$ ). Значит, рассматриваемые уравнения – квадратные. Дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен по условию:

$b^2 - 4ac < 0$, откуда получаем

$4ac > b^2 = |b|^2 > 2^2 = 4,\ ac > 1.$

Рассмотрим дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + abcx + c$:

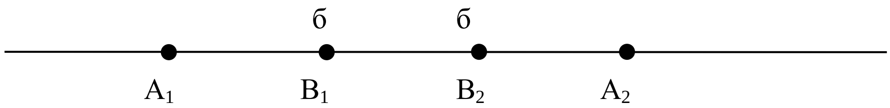
$$(abc)^2 - 4ac = b^2(ac)^2 - 4ac > 4(ac)^2 - 4ac = 4ac(ac - 1) > 0.$$

Следовательно, уравнение $ax^2 + abcx + c = 0$ имеет корни, что и требовалось доказать.

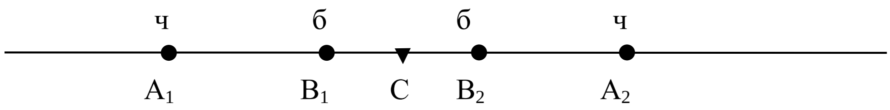
**8.4** Каждая точка плоскости окрашена произвольно в один из двух цветов – белый или черный, Докажите, что найдутся три точки одного цвета, лежащие на одной прямой, причем так, что одна из точек лежит посередине между двумя другими.

Решение:

Возьмем две точки одного цвета (такие, конечно, найдутся), скажем, белого: $B_1$ и $B_2$. Далее действуем на прямой $B_1B_2$.

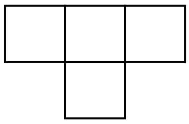



Возьмем точки $A_1$ и $A_2$ так (см. рис.), чтобы $A_1B_1=B_1B_2=B_2A_2$. Если хотя бы одна из точек $A_1$ и $A_2$ – белая, то требуемое получено: например, если $A_1$ – белая точка, то тройка точек $A_1$, $B_1$, $B_2$ дает то, что нужно. Предположим далее, что обе точки $A_1$ и $A_2$ – черные:




Рассмотрим точку C – середину отрезка $B_1B_2$. Если точка C – белая, то тройка точек $B_1$, C, $B_2$ – искомая, если же точка C – черная, то тройка точек $A_1$, C, $A_2$ – искомая.

Доказано.

**8.5** Докажите, что шахматную доску *10x10* нельзя покрыть *25* фигурами вида  *(клетки фигуры и клетки доски одинаковы)*.

Решение:

Считаем, что клетки доски раскрашены обычным образом – в шахматном порядке.

Предположим, что доска 10x10 покрыта 25 фигурами указанного вида. Заметим, что каждая фигура покрывает либо 3 белых и 1 черную клетки (фигура 1-го типа), либо 1 белую и 3 черных клетки (фигура 2-го типа). Пусть $k$ – число фигур 1-го типа, $l$ – число фигур 2-го типа. Тогда число белых клеток, покрытых этими фигурами, с одной стороны равно $3k + l$, а с другой стороны, белых клеток ровно 50:

$$3k + l = 50$$

Кроме того, число всех фигур равно 25: $k + l = 25$.

Но тогда $2k = (3k + l) - (k + l) = 50 - 25 = 25$, что невозможно при целом $k$.

Доказано.