8 класс

8.1 Докажите справедливость утверждения:

$$(35a + 65b) \vdots 17, \text{ если } (3a + 8b) \vdots 17, a, b, \in Z.$$

Решение:

Необходимо доказать, что выражение $(35a + 65b)$ делится без остатка на 17 при условии, что выражение $(3a + 8b)$ делится без остатка на 17.

Преобразуем исходное выражение

$$35a + 65b = 17a + 18a + 17b + 48b = 17(a + b) + 6(3a + 8b).$$

Каждое слагаемое правой части делится на 17. Следовательно, и вся сумма делится на 17.

Доказано.

8.2 Известно, что произведение двух последовательных четных чисел заканчивается на цифру 4. Какая может быть предпоследняя цифра этого произведения?

Решение:

Цифра 4 здесь получается только при перемножении 4 и 6. Это значит, что перемножаются числа вида $10k + 4$ и $10k + 6$. Их произведение равно $100k^2 + 100k + 24$, а такое число оканчивается на 24. То есть предпоследняя цифра всегда равна двум.

Ответ: 2.

8.3 Квадратный трехчлен при делении на $x - 2$ дает в остатке 3, а при делении на $x + 1$ дает в остатке -2. Найдите корни квадратного трехчлена.

Решение:

Квадратный трехчлен будем искать в виде приведенного многочлена, т.е. полагая $f(x) = x^2 + px + q$, т.к. его корни не зависят от того, приведен он или нет.

Далее, учитывая условия задачи, составим ряд тождеств:

$$\begin{cases} x^2 + px + q = (x - 2) \cdot h(x) + 3, \\ x^2 + px + q = (x + 1)\varphi(x) - 2. \end{cases}$$

Подставляем вместо х значения 2 и -1, соответственно, получаем:

$$\begin{cases} 4+2p+q=3 \\ 1-p+q=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{2}{3} \\ q=-\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Следовательно, $f(x)=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$

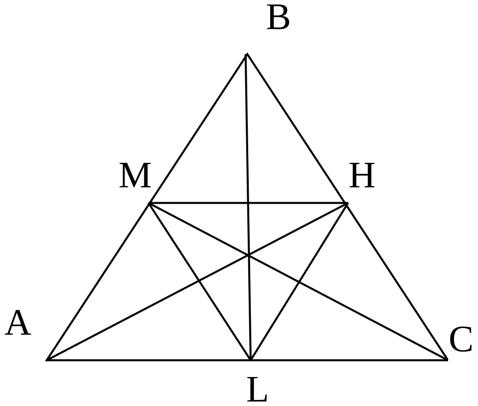
Найдем корни полученного квадратного трехчлена

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{22}}{3}$$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{22}}{3}$.

8.4 В треугольнике ABC середина биссектрисы BL совпадает с серединой отрезка MH, соединяющего основания высоты AH и медианы CM. Найдите углы треугольника.

Решение:



Поскольку в четырёхугольнике *BMLH* диагонали делятся точкой пересечения пополам, то он параллелограмм. Следовательно, $ML \parallel BC$. Поскольку *CM* — медиана, *ML* — средняя линия треугольника *ABC*. Но тогда *L* — середина стороны *AC*, и $LH \parallel AB$ — тоже средняя линия. Получается, что биссектриса *BL* и высота *AH* одновременно являются медианами, откуда $AB = BC = AC$, то есть все углы треугольника *ABC* равны 60°.

Ответ: Все по 60°.

8.5 У школьника было несколько монет достоинством 15 копеек и 20 копеек Причем, двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билеты в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника в начале?

Решение:
Пусть у школьника было x двадцатикопеечных монет и y пятнадцатикопеечных. Тогда

$(20x + 15y)$ копеек — сумма денег, которая была у школьника в начале;

$\frac{20x+15y}{5} = (4x + 3y)$ копеек – было уплачено за билеты в кино;

$\frac{(20x+15y)-(4x+3y)}{2} = (8x + 6y)$ копеек – было уплачено за обед.

По условию задачи билеты оплачены двумя монетами, а обед тремя. А так как сумма, уплаченная за обед, в 2 раза больше суммы, уплаченной за билеты в кино, то отсюда следует, что обед оплачен тремя двадцатикопеечными монетами, т.е. 60 копеек.
Следовательно, за билеты в кино уплачена сумма в 30 копеек, составленная двумя пятнадцатикопеечными монетами. Итак,

$$\begin{cases} 4x + 3y = 30, \\ x > y, \\ x, y \in N. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$x = \frac{30 - 3y}{4} = 7 - \frac{3y - 2}{4}.$$

Так как выражение $\frac{3y-2}{4}$ – натуральное число, то отсюда следует, что $y \geq 2$. Положим $y = 2$, тогда $x = 6$. Эта пара значений удовлетворяет условию задачи.
Следующим значением y, при котором дробь $\frac{3y-2}{4}$ является натуральным числом, является 6. Если $y = 6$, то $x = 7 - \frac{3\cdot 6-2}{4} = 3$. Эта пара значений x и y уже не удовлетворяет условиям задачи, так как 3 < 6. По этой же причине не удовлетворяют условиям задачи и последующие значения y, для которых $\frac{3y-2}{4}$ – натуральное число.

Ответ: 6 и 2.