11 класс

11.1 Решите уравнение: $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

Решение:
Разделим обе части уравнения на $x^3-1\neq 0$ (заметим, что $x=1$ не является корнем данного уравнения).

$$2\frac{x^2+x+1}{x-1}-7\frac{x-1}{x^2+x+1}=13.$$

Положим

$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=t, t\neq 0.$$

Тогда

$$2t-\frac{7}{t}=13,$$
$$2t^2-13t-7=0,$$
$$t=7 \text{ или } t=-\frac{1}{2},$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7\\ \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-6x+8=0\\ x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_1=2,\\ x_2=4,\\ x_3=-1,\\ x_4=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1,-\frac{1}{2},2,4\right\}$.

11.2 Решите неравенство: $4^{log_2{}^2x}+x^{log_2x}\leq 6$.

Решение:
Сделаем подстановку

$$log_2x=t.$$

Тогда

$$x=2^t, x^{log_2x}=(2^t)^t=2^{t^2},$$
$$4^{log_2{}^2x}=(2^2)^{t^2}=2^{2t^2}=\left(2^{t^2}\right)^2.$$

Введем новую переменную

$$y=2^{t^2}, y\geq 1, 4^{log_2{}^2x}=y^2, x^{log_2x}=2^{t^2}=y.$$

В новом обозначении данное неравенство имеет вид:

$$y^2+y-6\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq y\leq 2.$$

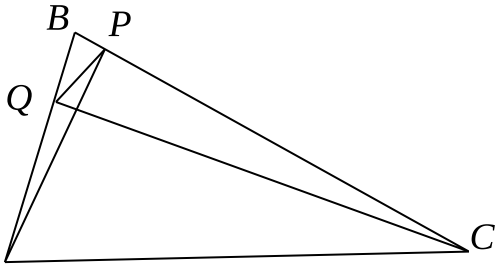
С учетом неравенства $y\geq 1$ получим:

$$1\leq y\leq 2, \qquad 1\leq 2^{t^2}\leq 2, 0\leq t^2\leq 1, 0\leq |t|\leq 1,$$
$$-1\leq t\leq 1, -1\leq log_2x\leq 1, 0{,}5\leq x\leq 2.$$

Ответ: $[0{,}5; 2]$.

11.3 В остроугольном треугольнике *ABC* из вершин *A* и *B* опущены высоты *AP* и *CQ* на стороны *BC* и *AB*. Известно, что площадь треугольника *ABC* равна 18, площадь треугольника *BPQ* равна 2, а длина отрезка *PQ* равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*.

Решение:



Из прямоугольных треугольников *ABP*, *BCQ* находим

$$\frac{BP}{AB} = cos\angle B, \quad \frac{BQ}{BC} = cos\angle B.$$

Из этих равенств следует, что треугольники *BPQ*, *ABC* подобны (по двум сторонам и углу между ними), причем коэффициент подобия равен $cos\angle B$. так как отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия, то

$$cos^2\angle B = \frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

По условию треугольник *ABC* остроугольный, значит, $cos\angle B > 0$ и, следовательно, $cos\angle B = \frac{1}{3}$. Из подобия треугольников *BPQ* и *ABC* вытекает равенство

$$\frac{PQ}{AC} = cos\angle B = \frac{1}{3}, \qquad AC = 3 \cdot PQ = 6\sqrt{2}.$$

Обозначим через *R* радиус окружности, описанной вокруг треугольника *ABC*. По теореме синусов

$$2R = \frac{AC}{sin\angle B} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = 9,$$

откуда

$$R = \frac{9}{2}.$$

Ответ: $\frac{9}{2}$.

11.4 В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй – 20кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором – в q раз. Известно, что pq = 9. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

Решение:

Обозначим через u кг и v кг соответственно количество соли в первом и во втором сосудах, а через x кг и y кг – количество испарившейся воды. Тогда из условия задачи имеем

$$\frac{\frac{u}{5-x}}{\frac{u}{5}} = p \text{ и } \frac{\frac{v}{20-y}}{\frac{v}{20}} = q,$$

или

$$\frac{5}{5-x} = p, \frac{20}{20-y} = q.$$

Из первого равенства находим

$$x = 5 - \frac{5}{p},$$

из второго

$$y = 20 - \frac{20}{q}.$$

Количество испарившейся воды равно

$$x + y = 25 - \frac{5}{p} - \frac{20}{q}$$

или ввиду равенства pq = 9

$$x + y = 25 - \left(\frac{5}{p} + \frac{20}{9}p\right).$$

Пользуясь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел, находим, что

$$\frac{5}{p} + \frac{20}{9}p \geq 2\sqrt{\frac{5}{p} \cdot \frac{20}{9}p} = \frac{20}{3}. \qquad (1)$$

Следовательно, $x + y = 25 - \frac{20}{3} = 18\frac{1}{3}$. Итак, воды не может испариться более $18\frac{1}{3}$ кг.

Если $\frac{5}{p} = \frac{20}{9}p, p = \frac{3}{2}$, то неравенство (1) обращается в равенство.

Итак, при $p = \frac{3}{2}$ из обоих сосудов вместе испарится наибольшее количество воды. При этом из первого сосуда испарится $x = 5 - \frac{5}{p} = \frac{5}{3}$ кг, из второго сосуда $y = 20 - \frac{20}{9}p = \frac{50}{3}$ кг воды, а общее количество испарившейся воды будет $\frac{5}{3} + \frac{50}{3} = 18\frac{1}{3}$ кг.

Ответ: $18\frac{1}{3}$ кг.

11.5 Найдите все целые числа k, для которых $k^5 - k$ делится на 120.

Решение:
Разложим 120 на простые множители:

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 3 \cdot 5.$$

Далее, преобразуем выражение

$$k^5 - k = k(k^2 - 1)(k^2 + 1).$$

Из трех последовательных чисел $k - 1, k, k + 1$ одно делится на 3. Докажем делимость на 5. При делении числа k на 5 получаются остатки: $0; \pm 1;\ \pm 2$, т.е.

$$k = \begin{cases} 5l, \\ 5l \pm 1, \\ 5l \pm 2. \end{cases}$$

Если $k = 5l$, то $k \vdots 5$, если $k = 5l + 1$, то $(k - 1) \vdots 5$, если $k = 5l - 1$, то $(k + 1) \vdots 5$. Убедимся, что если $k = 5l \pm 2$, то $(k^2 + 1) \vdots 5$.

Действительно, $k^2 + 1 = (5l \pm 2)^2 + 1 = 5z_1 + 5$,

т. е. $(\mathrm{k}^2 + 1) \vdots 5$,

где $z_1 = 5l^2 \pm 4l$.

Итак, $k^2 + 1$ нацело делится на 5 при любом $k \in Z$.

Следовательно, искомое значение числа k можно найти лишь из условия $(k^5 - k) \vdots 8$. При делении числа k на 8 получаются следующие остатки:

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, +4$, т. е.

$$k = \begin{cases} 8l, \\ 8l \pm 1, \\ 8l \pm 2, \\ 8l \pm 3, \\ 8l + 4 \end{cases}$$

Если $k = \begin{cases} 8l, \\ 8l \pm 1 \end{cases}$, то $(k-1)k(k+1) \vdots 8$, поэтому $(k^5 - k) \vdots 8$.

Пусть теперь $k = 8l \pm 2$. Поинтересуемся только произведением остатков сомножителей $k, k^2 - 1, k^2 + 1$, при делении на 8. Эти остатки, соответственно, равны $\pm 2, 3, 5$, т.е. произведение остатков имеет лишь два вида ± 30, которые не делятся на 8.

Следовательно, если $k = 8l \pm 2$, то $k^5 - k$ не делится на 8.

Пусть теперь $k = 8l \pm 3$. Указанные остатки равны соответственно: $\pm 3, 8, 10$. Тогда произведение остатков имеет два вида: ± 240, которые делятся на 8.

Следовательно, если $k = 8l \pm 3$, то $(k^5 - k) \vdots 8$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $k = 8l + 4$. Произведение остатков равно

$(4 \cdot 15 \cdot 17)$ не делится на 8.

Ответ: $k = 8l, k = 8l \pm 1, k = 8l \pm 3, l \in Z$.