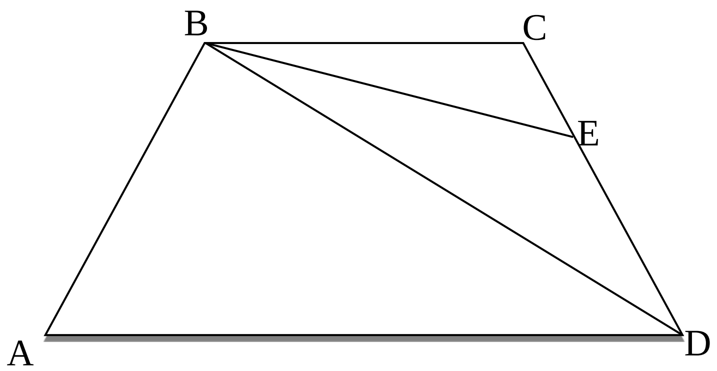
11 класс

11.1. Площадь трапеции *ABCD* равна 99. Точка *E* находится на боковой стороне *CD*. Известно, что *AD:BC*=2:1, *DE:EC*=2:1. Найдите площадь четырехугольника *ABED*.

Решение:

См. рисунок.



На основании использования формул для нахождения площади трапеции и площади треугольника, можно установить, что площадь треугольника ABD составляет $\frac{2}{3}$ площади трапеции, т.е. 66. Следовательно, площадь треугольника DBC составляет 33. Площадь треугольника DBE составляет $\frac{2}{3}$ площади треугольника DBC, т.е. 22.

Суммируя площади треугольников ABD и DBE, получаем 88.

Ответ: 88.

11.2 Сумма двух различных положительных чисел a и b равна 1. Определим числа s и t так, чтобы $a^s = b^t = \frac{1}{2}$. Докажите, что одно из чисел s и t больше 1, а другое – меньше 1.

Решение:

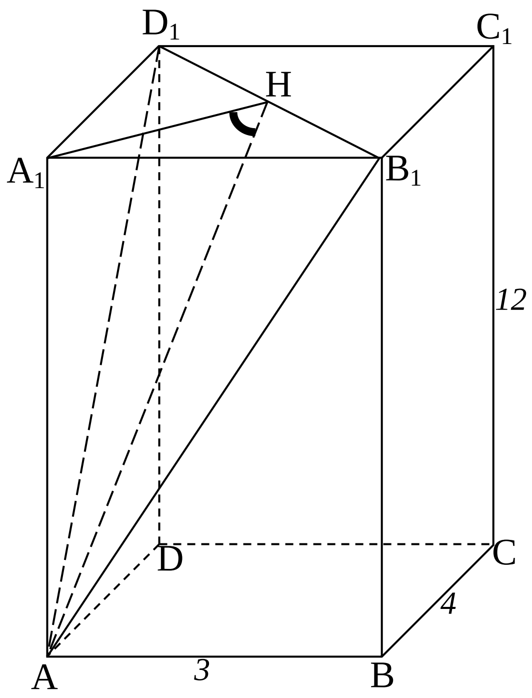
Из чисел a и b одно меньше $\frac{1}{2}$, другое – больше $\frac{1}{2}$. Пусть, например, $a < \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{2}$. Так как $a^s = \frac{1}{2}$, то $s < 1$ (функция $f(x) = a^x$ убывающая, $f(0) = 1, f(1) = a < \frac{1}{2}$). Аналогично, $t > 1$.

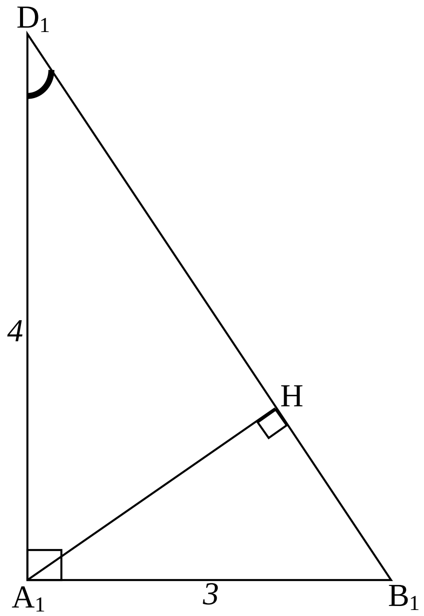
Доказано.

11.3 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $AB=3$, $AD=4$, $AA_1=12$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ABC.

Решение:

См. рисунок.





Ищем угол между плоскостями (AB_1D_1) и ($A_1B_1D_1$). Построение: $A_1H \perp B_1D_1$. Тогда (по теореме о трех перпендикулярах) $AH \perp B_1D_1$. Угол AHA_1 – искомый. Найдем тангенс этого угла: $tg\alpha = \frac{AA_1}{A_1H} = \frac{12}{A_1H}$.

Вычислим A_1H.

$B_1D_1=5$.

$\frac{A_1H}{A_1D_1} = \frac{A_1B_1}{B_1D_1}, \frac{A_1H}{4} = \frac{3}{5}, \quad A_1H = \frac{12}{5}$.

$tg\alpha = \frac{12}{\frac{12}{5}} = 5, \alpha = arctg5$.

Ответ: $arctg5$.

11.4 Существует ли такое число α, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2013\alpha = \frac{1}{2}$?

Решение:

Предположим, что такое число α существует. Тогда $\alpha = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k$, $2013\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, при некоторых целых k и n и с некоторым знаком + или $-$.

Получаем $(-1)^k * 2013\frac{\pi}{3} + 2013\pi k = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $(-1)^k * 2013 + 3 * 2013k = \pm 1 + 6n$. Это – невозможное равенство целых чисел, т.к. левая часть делится на 3, а правая – нет.

Ответ: не существует.

11.5 Множество решений неравенства $x^2 + px + q < 0$ содержит не менее трех различных целых чисел. Докажите, что $D = p^2 - 4q > 4$.

Решение:

Множество решений неравенства $x^2 + px + q < 0$ представляет собой интервал (x_1, x_2), где x_1 – меньший корень, а x_2 – больший корень трехчлена $x^2 + px + q$. По условию этот интервал содержит не менее трех целых чисел. Значит, длина этого интервала больше 2, т.е. $x_2 - x_1 > 2$.

Теперь находим: $x_2 - x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} - \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \sqrt{D} > 2, D > 4$.

Доказано.