11 класс

11.1 Вычислите $\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$.

Решение:

Имеем

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}=-\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{\cos\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{\left(2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cdot\cos\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}=-\frac{1}{4}.$$

Ответ: -0,25.

11.2 Даны два натуральных числа m и n. Докажите, что число 2^n-1 делится на число $(2^m-1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m-1)$.

Решение:

Из равенства

$$2^{kn}-1=(2^n-1)(2^{n(k-1)}+2^{n(k-2)}+\ldots+1)$$

Следует, что $2^{kn}-1$ делится на 2^n-1, поэтому

$$2^{kn+d}-1=2^{kn+d}-2^d+2^d-1=2^d(2^{kn}-1)+2^d-1\equiv 2^d-1(\bmod 2^n-1).$$

Таким образом, 2^n-1 делится на 2^m-1 тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n=km$, то

$$\frac{2^{km}-1}{2^m-1}=1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)}.$$

Каждое слагаемое дает остаток 1 при делении на 2^m-1, поэтому

$$\frac{2^{km}-1}{2^m-1}\equiv k(\bmod 2^m-1).$$

Поэтому $2^{km}-1$ делится на $(2^m-1)^2$ тогда и только тогда, когда $k=\dfrac{m}{n}$ делится на 2^m-1, что равносильно тому, что n делится на $m(2^m-1)$.

Доказано.

11.3 Решите в целых числах уравнение

$$(2y-2x-3633)\left(1580^{x^2}+x^2+x+3\right)=1580.$$

Решение:

Произведение двух целых чисел равно 1580 – четному числу. Выражение в первой скобке – нечетное число. Значит, выражение во второй скобке должно быть четным числом. Запишем

$$1580^{x^2}+x^2+x+3=1580^{x^2}+x(x+1)+3.$$

Выражение $x(x+1)$ – четное, $x(x+1)+3$ – нечетное, значит, 1580^{x^2} должно быть нечетным. Это возможно в единственном случае при $x=0$. Подставляем найденное значение x, получим уравнение

$(2y-3633)4=1580$, откуда $y=2014$.

Ответ: $x=0, y=2014$.

11.4 В учебном корпусе на каждом этаже находится одинаковое количество аудиторий. Всего в корпусе 96 аудиторий, а площадь каждой из них равна 46 м^2. При строительстве корпуса суммарные затраты на земляные, отделочные работы и оборудование аудиторий не превысили 252720 рублей, причем на отделочные работы было израсходовано по 2760 рублей на каждый этаж постройки, на оборудование аудиторий – по 2000 рублей на каждую аудиторию, и на земляные работы на отведенном под строительство участке земли – по 14 рублей на 1м^2 земельного участка. Известно, что площадь участка земли не превосходит 2250 м^2, а общая площадь всех аудиторий одного этажа в 5 раз меньше площади земельного участка. Сколько этажей в корпусе?

Решение:

Пусть в корпусе n этажей. Тогда на каждом этаже $\frac{96}{n}$ аудиторий, а площадь всех аудиторий на одном этаж составит $\frac{96\cdot46}{n}$, а площадь земельного участка $\frac{96\cdot46\cdot5}{n}$. Из условий задачи получаем систему

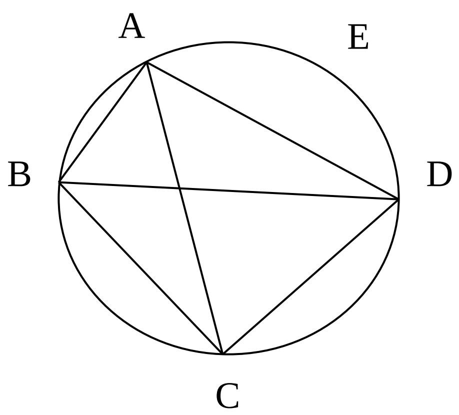
$$\begin{cases} 2760 \cdot n + 96 \cdot 2000 + 14 \cdot \dfrac{96 \cdot 46 \cdot 5}{n} \le 252720 \\ \dfrac{96 \cdot 46 \cdot 5}{n} \le 2250, n, \dfrac{96}{n} \epsilon N \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \le n \le 14 \\ n \ge 10 \\ n, \dfrac{96}{n} \epsilon N \end{cases} \Leftrightarrow n = 12.$$

Ответ: 12 этажей.

11.5 Диагональ *BD* четырехугольника *ABCD* является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите длину диагонали *AC*, если *BD* = 2, *AB* = 1, $\dfrac{\angle ABD}{\angle DBC} = \dfrac{4}{3}$.

Решение:



Так как *BD* – диаметр окружности, то $\angle BAD = \angle BCD = \dfrac{\pi}{2}$. Обозначим $\angle ABD = x$, тогда из прямоугольного треугольника ABD получаем, что $\cos x = \dfrac{AB}{BD}$. По условию $BD = 2,\ \ AB = 1$, значит, $\cos x = \dfrac{1}{2}$, и так как x – внутренний угол прямоугольного треугольника ABD, то $x = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда $\angle DBC = \dfrac{3}{4}\angle ABD = \dfrac{\pi}{4}$. Вписанные углы $\angle ACD, \angle ABD$ опираются на одну и ту же дугу AED, значит, $\angle ACD = \angle ABD = \dfrac{\pi}{3}$. Из треугольника ADC по теореме синусов получаем, что

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD},$$

откуда $AC=\dfrac{AD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}$, так как $AD=AB\cdot tgx=\sqrt{3}$, то

$\angle ADC=\pi-\angle ABD-\angle DBC=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$, то

$$AC=\frac{\sqrt{3}\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

Ответ: $AC=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$