11 класс

11.1 Найдите все натуральные k при которых число $2^k + 8k + 5$ есть точный квадрат.

Решение:

Проверка показывает, что значение $k = 1$ не подходит, значение $k = 2$ подходит, значения $k = 3, 4, 5, 6$ не подходят. По-видимому, никакое $k > 2$ не удовлетворяет условию задачи. Докажем наше предположение.

Предположим, что существует такое $k > 2$, что число $2^k + 8k + 5$ является точным квадратом. Так как это число нечетно, то

$2^k + 8k + 5 = (2a - 1)^2$, где a – целое.

Получаем:

$$2^k + 8k + 5 = (2a - 1)^2 = 4a^2 - 4a + 1,$$

$$2^k + 8k + 4 = 4a(a - 1).$$

В последнем равенстве правая часть делится не только на 4, но и на 8. Но левая часть на 8 не делится, поэтому такое неравенство невозможно. Мы пришли к противоречию. Следовательно, ни одно $k > 2$ не обладает требуемым свойством.

Ответ: 2.

11.2 Докажите, что каждое решение неравенства

$$\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1} > 2$$

удовлетворяет неравенству

$$x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 + 2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Решение:

Обозначим $\sqrt{x-1} + 1 = a, \sqrt[3]{x^2-1} - 1 = b$, получим следующую задачу: доказать, что если $a + b > 2,$ то $a^2 + b^2 > 2$. Это следует из следующей цепочки преобразований:

$$2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} > \frac{2^2 + 0^2}{2} = 2.$$

11.3 Решите уравнение

$$2x^2 + log_2(7 + 2x - x^2) = 4 + x^4.$$

Решение:

Преобразуем уравнение к виду

$$log_2(7 + 2x - x^2) = x^4 - 2x^2 + 4$$

или $log_2(8 - (x-1)^2) = (x^2 - 1)^2 + 3.$

Поскольку $log_2(8 - (x-1)^2) \le log_2 8 = 3$, а $(x^2 - 1)^2 + 3 \ge 3$, то последнее уравнение имеет решение в том и только в том случае, когда обе его части равны 3, т.е.

$$\begin{cases} 8 - (x-1)^2 = 8, \\ (x^2 - 1)^2 = 0. \end{cases}$$

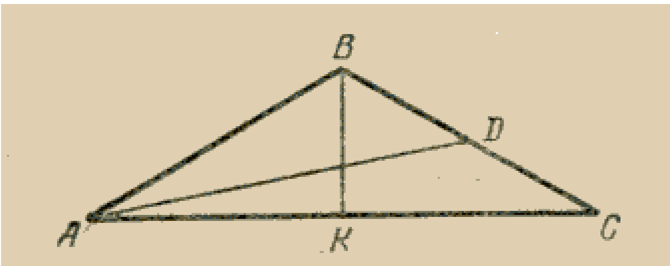
Отсюда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

11.4 Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине этого треугольника, противолежащий основанию. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

Решение:

Пусть *ABC* – данный в условии задачи равнобедренный треугольник. Пусть *AD* – медиана, проведенная к боковой стороне *BC*, а *BK* – высота, опущенная из вершины треугольника на основание.



Из прямоугольного треугольника *BKC* находим, что

$$\frac{KC}{BC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{BK}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

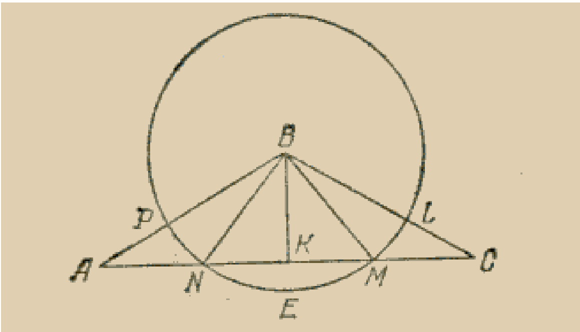
откуда $BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}KC,\quad BK=\frac{1}{2}BC,$ и тогда $DC=\frac{1}{2}BC=\frac{KC}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов, поименной к треугольнику *ADC*, имеем

$AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cdot\cos 30^\circ$. Так как $AC=2KC,\quad AD=\sqrt{7}$, то отсюда следует равенство

$$7=4KC^2+\frac{KC^2}{3}-2\cdot\frac{2KC\cdot KC}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

из которого следует, что $KC=\sqrt{3}$.

Но тогда $AC=2\sqrt{3},\quad AB=BC=2DC=2,\quad BK=1$. Так как площадь треугольника *ABC* можно найти по формуле ABC $S=\frac{1}{2}AC\cdot BK$, то $S=\sqrt{3}$. Поскольку $2>2/\sqrt{3}>1$, то радиус окружности больше, чем длина высоты *BK* треугольника *ABC*, но меньше, чем длина боковой стороны. Следовательно, окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине *B* пересекает основание *AC* в двух точках *N* и *M*.



Пусть эта окружность пересекает сторону *AB* в точке *P*, а сторону *BC* в точке *L*. Общая часть треугольника *ABC* и построенного круга есть «криволинейный пятиугольник» *BLMKNP*. Его площадь равна сумме площадей треугольника *NBM* и двух секторов *MBL* и *NBP*. Так как $\sin\angle KMB=\frac{BK}{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle KMB=\frac{\pi}{3}$, значит, треугольник *NBM* равносторонний. Поэтому $NM=BM=\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $S_{NBM}=\frac{1}{2}NM\cdot BK=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее, $\angle MBL=\angle BMN-\angle BCM=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$. Следовательно, площадь сектора *MBL* равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{9}$. Аналогично, площадь сектора *NBP* равна $\dfrac{\pi}{9}$. Таким образом, площадь «криволинейный пятиугольник» равна $S_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2\pi}{9}$, а искомое отношение $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.

Ответ: $\dfrac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.

11.5 Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду, было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменованным при этих условиях.

Решение:

Обозначив число аудиторий в корпусах как n и k, соответственно, для первого и второго корпусов, получим, что число сдававших абитуриентов с одной стороны равно $3 \cdot n^2$, а с другой стороны – $2 \cdot k^3$. Таким образом, получаем уравнение $3 \cdot n^2 = 2 \cdot k^3$. Левая часть равенства делится на 3, следовательно, и правая тоже, т. е. $k \,\vdots\, 3$. Правая часть делится на 2, следовательно, $3 \cdot n^2 \,\vdots\, 2$. Но тогда n^2 делится на 2, а, значит, и на 4. В этом случае и правая часть делится на 4, а это возможно, если $k \,\vdots\, 2$. Таким образом $k = 6l, l \in N$. Тогда, подставляя это значение k в уравнение и производя сокращение на 3, получаем $n^2 = (12 \cdot l)^2$. Тогда минимальное значение n принимает при $l = 1$ и оно равно 12. Далее, находим число абитуриентов $3 \cdot 12^2 = 432$.

Ответ: 432.