11 класс

11.1 Число t таково, что разность $\sqrt{557+t}-\sqrt{500-t}$ равна *10*. Чему равна сумма $\sqrt{557+t}+\sqrt{500-t}$?

Решение:

По условию $\sqrt{557+t}-\sqrt{500-t}=10$ (1)

Пусть $\sqrt{557+t}+\sqrt{500-t}=x$ (2)

Возведем (1) и (2) в квадрат и сложим получившиеся равенства, получим $2114=100+x^2$, откуда $x=\sqrt{2014}$.

Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{2014}}$.

11.2 Функция *f(x)* определена на интервале *(1;4)* и имеет вид $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2014$. Найдите число касательных к графику этой функции, угловой коэффициент которых является целым числом.

Решение:

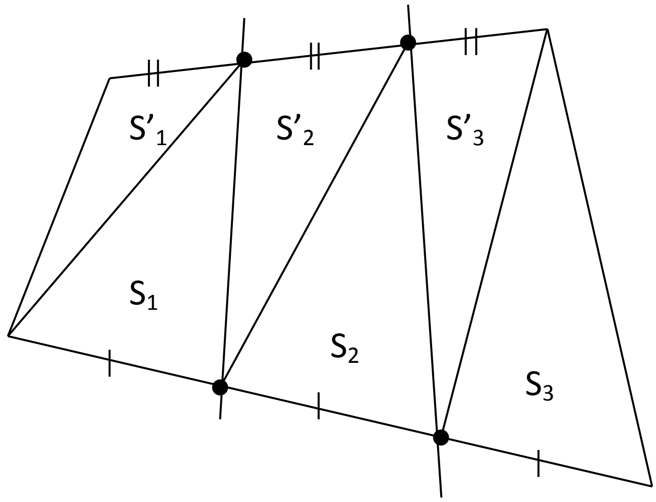
$f'(x)=x^2+x, x\in(1;4)$. Найдем множество значений производной $f'(x)$.Функция $f'(x)$ является непрерывной и возрастающей на *(1; 4)* функцией. Поэтому $E(f')=\left(f'(1);f'(4)\right)=(2;20)$. Так как угловой коэффициент касательной к графику f в точке с абсциссой x равен $f'(x)$, то количество касательных с целым угловым коэффициентом равно числу значений x, при которых $f'(x)$ является целым числом. Но все возможные целые значения $f'(x)$ – это числа *3, 4, … , 19*. Их всего *17*.

Ответ: **17.**

11.3 Дан выпуклый четырехугольник. Проведем две прямые, которые делят две его противоположные стороны на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырехугольника.

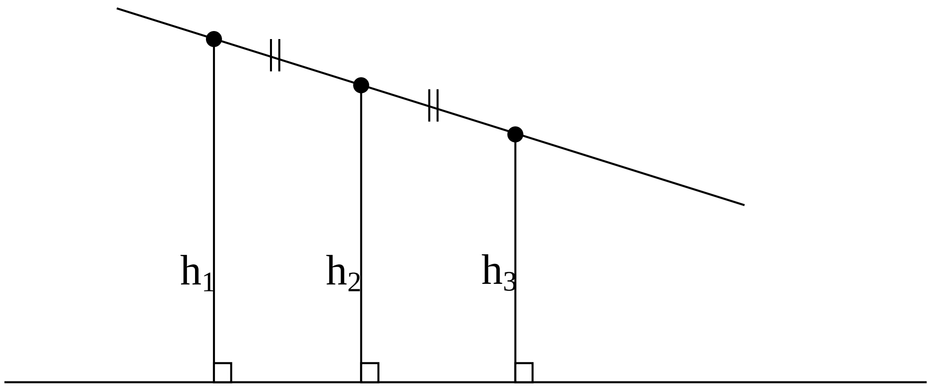
Решение:

См. рис.



Основное наблюдение: $S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3)$.

Это вытекает из того, что основания у треугольников *(S_1), (S_2), (S_3)* одинаковы, а высота треугольника *(S_2)* равна полусумме высот треугольников *(S_1)* и *(S_3)*.



$\begin{pmatrix}\text{средняя}\\ \text{линия}\\ \text{трапеции}\end{pmatrix}$

Аналогично $S'_2 = \frac{1}{2}(S'_1 + S'_3)$. Поэтому $S_2 + S'_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_3 + S'_1 + S'_3) = \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 + S'_1 + S'_2 + S'_3) - \frac{1}{2}(S_2 + S'_2) = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}(S_2 + S'_2)$, $S_2 + S'_2 = \frac{1}{3}S$, **что и требовалось доказать.**

11.4 Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x + xy + y^2 = 10, \\ x^2 + arctg\, y = 10 \end{cases}$ имеет решение в положительных числах.

Решение:

При любом y из второго уравнения однозначно определяется положительный x: $x = \sqrt{10 - arctg\, y}$ (обратите внимание на то, что $10 - arctg\, y > 10 - \frac{\pi}{2} > 0$ при любом y). Подставим полученное выражение для x в первое уравнение:

$$\sqrt{10 - arctg\, y} * (1+y) + y^2 = 10 \qquad (*)$$

Достаточно доказать, что существует положительный y, удовлетворяющий последнему уравнению. Рассмотрим при $y \geq 0$ функцию $f(y) = \sqrt{10 - arctg\, y} * (1+y) + y^2 - 10$. Эта функция непрерывна.

Имеем $f(0) = \sqrt{10} - 10 < 0$,

$$f(2) = \sqrt{10 - arctg\, 2} \cdot (1+2) + 2^2 - 10 > \left[т.к.\ arctg\, x < \frac{\pi}{2} < 2 \right] >$$

$$> \sqrt{10-2} \cdot 3 - 6 = \sqrt{8} \cdot 3 - 6 = 3\left(\sqrt{8} - 2\right) > 0.$$

Итак, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$. Следовательно, между $y = 0$ и $y = 2$ есть такой y, для которого $f(y) = 0$, т.е. уравнение (*) имеет положительный корень. Этим все доказано.

Доказано.

11.5 Докажите, что если $x > 0, y > 0, x \neq y$, то $\frac{8}{(x+y)^2} \leq \frac{2}{(x-y)^2} + \frac{1}{2xy}$.

<u>Решение:</u>

Равносильные преобразования приводят к неравенству $16xy(x-y)^2 \leq (x+y)^4$. Это неравенство однородно (для любого $\lambda > 0$ замена x на λx, y на λy фактически неравенство не меняется). Поэтому можно считать, что $x - y = 1$ (умножив x и y на подходящее λ, если $x - y = 1$ не выполнено). Тогда $x = y + 1$, и мы получаем неравенство $16(y+1)y \leq (2y+1)^4$, $(y > 0)$.

Исследуем функцию $f(y) = (2y+1)^4 - 16(y^2+y)$ на монотонность при $y > 0$. Имеем: $f'(y) = 4(2y+1)^3 * 2 - 16(2y+1) = 8(2y+1)((2y+1)^2 - 2)$.

Стационарная точка функции: $(2y+1)^2 - 2 = 0, (2y+1)^2 = 2, y_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

При этом $f'(y) < 0$, для $y \in (0;\, y_0)$ и $f'(y) > 0$ для $y \in (y_0;\, \infty)$. Таким образом, y_0 – точка, в которой функция $f(y)$ принимает свое наименьшее значение. Вычислим это наименьшее значение: $f(y_0) = 4 - 16 * \frac{\sqrt{2}-1}{2} * \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} + 1\right) = 4 - 4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = 0$. Следовательно, $f(y) \geq f(y_0) = 0$ при всех $y > 0$, **что и требовалось доказать**.