

11-й класс

11.1. Решите уравнение относительно x :

$$x^2 - 2ax + \sqrt{x} + a^2 - a = 0. \quad (1)$$

Решение. Положив $\sqrt{x} = y \geq 0$, получим уравнение $y^4 - 2ay^2 + y + a^2 - a = 0$, которое запишем как квадратное относительно a :

$$a^2 - (2y^2 + 1)a + y^4 + y = 0. \quad (2)$$

Его дискриминант

$$D = (2y^2 + 1)^2 - 4(y^4 + y) = 4y^4 + 4y^2 + 1 - 4y^4 - 4y = 4y^2 - 4y + 1 = (2y - 1)^2;$$

$$\Rightarrow a = \frac{2y^2 + 1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{2y^2 + 1 \pm (2y - 1)}{2} = \begin{cases} y^2 - y + 1, \\ y^2 + y, \end{cases}$$

т. е. имеем два (квадратных) уравнения относительно y .

1) Уравнение $y^2 + y = a \Leftrightarrow y^2 + y - a = 0$ и имеет действительные корни $y_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4a})/2$ при условии, что $a \geq -1/4$ (при $a < -1/4$ действительных корней нет); при этом $y_1 = (-1 - \sqrt{1 + 4a})/2 \leq 0$ при любом $a \geq -1/4$, а $y_2 = (\sqrt{1 + 4a} - 1)/2 \geq 0$ при условии, что $a \geq 0$. Значит, при $a \in [0; 3/4]$ уравнение (2), а с ним и (1), имеет 1 корень

$$x = (y_2)^2 = (\sqrt{1 + 4a} - 1)^2 / 4 = (2a + 1 - \sqrt{1 + 4a}) / 2.$$

2) Уравнение $y^2 - y + 1 = a \Leftrightarrow y^2 - y - (a - 1) = 0$ и имеет действительные корни $y_{3,4} = (1 \pm \sqrt{4a - 3})/2$ при условии, что $a \geq 3/4$ (при $a < 3/4$ действительных корней нет); при этом $y_3 = (1 - \sqrt{4a - 3})/2 \geq 0$ при $a \leq 1$, а $y_4 = (1 + \sqrt{4a - 3})/2 \geq 0$ при любом $a \geq 3/4$. Значит, при $a \in [3/4; 1]$ уравнение (2) имеет 3 неотрицательных корня: y_1, y_2, y_3 , дающих для уравнения (1) три корня:

$$x_1 = (y_2)^2 = (\sqrt{1 + 4a} - 1)^2 / 4 = (2a + 1 - \sqrt{1 + 4a}) / 2,$$

$$x_{2,3} = (y_{3,4})^2 = (1 \pm \sqrt{4a - 3})^2 / 4 = (2a - 1 \pm \sqrt{4a - 3}) / 2;$$

при $a > 1$ уравнение (2) имеет два неотрицательных корня: y_2 и y_4 , дающих для уравнения (1) два корня:

$$x_1 = (y_2)^2 = (\sqrt{1 + 4a} - 1)^2 / 4 = (2a + 1 - \sqrt{1 + 4a}) / 2,$$

$$x_2 = (y_4)^2 = (1 + \sqrt{4a - 3})^2 / 4 = (2a - 1 + \sqrt{4a - 3}) / 2;$$

Объединяя результаты, получаем

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то действительных корней нет;

если $a \in [0; 3/4]$, то $x = a + (1 - \sqrt{4a + 1})/2$;

если $a \in [3/4; 1]$, то $x_1 = a + (1 - \sqrt{4a + 1})/2$, $x_{2,3} = a - (1 \pm \sqrt{4a - 3})/2$;

если $a \in (1; \infty)$, то $x_1 = a + (1 - \sqrt{4a + 1})/2$, $x_2 = a - (1 - \sqrt{4a - 3})/2$.

11.2. Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt[3]{2014 - x}}{1 - \sqrt{x - 2013}} \leq 1.$$

Решение. ОДЗ данного неравенства есть $\Omega = [2013; 2014) \cup (2014; \infty)$.

Положим $\sqrt{x-2013} = y \geq 0$, тогда $2014 - x = 1 - y^2$, а неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-y^2}}{1-y} \leq 1, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Возведя обе части первого неравенства в куб, получим:

$$\frac{1-y^2}{(1-y)^3} \leq 1.$$

Сократив на $1-y \neq 0$ (так как $y \neq 1$ при $x \in \Omega$), имеем:

$$\frac{1+y}{(1-y)^2} \leq 1, \Rightarrow 1+y \leq 1-2y+y^2, \Rightarrow y(y-3) \geq 0,$$

откуда $y \in (-\infty; 0] \cup [3; \infty)$, $\Rightarrow$ (с учётом второго неравенства системы)
 $y \in \{0\} \cup [3; \infty)$, $\Rightarrow y^2 \in \{0\} \cup [9; \infty)$, $\Rightarrow x = 2013 + y^2 \in \{2013\} \cup [2022; \infty)$.

Ответ: $x \in \{2013\} \cup [2022; \infty)$.

11.3. Решите систему:

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$$

Решение: Пусть $x^3 = p$, $\sqrt{y} = q$. Система примет вид

$$\begin{cases} p - q = 1, & q \geq 0, \\ 5p^2 - 8pq + 2q^2 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = p - 1, & q \geq 0, \\ 5p^2 - 8p(p-1) + 2(p-1)^2 = 2. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение этой системы:

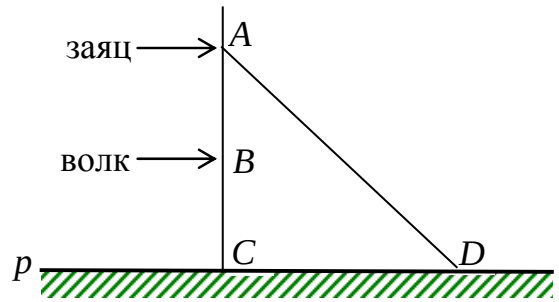
$$5p^2 - 8p^2 + 8p + 2(p^2 - 2p + 1) = 2, \Leftrightarrow -p^2 + 4p = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ p = 4. \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{aligned} \begin{cases} q = p - 1, & q \geq 0, \\ \begin{cases} p = 0, \\ p = 4. \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} q = p - 1, \\ q \geq 0, \\ p = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} q = p - 1, \\ q \geq 0, \\ p = 4, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} q = -1, \\ q \geq 0, \\ p = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} q = 3, \\ q \geq 0, \\ p = 4, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset, \\ \begin{cases} p = 4, \\ q = 3, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4, \\ q = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 4, \\ \sqrt{y} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}, \\ y = 9. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = \sqrt[3]{4}, y = 9$.

11.4. Границей леса является прямая p . На перпендикуляре AC к прямой p в точках A и B находятся соответственно заяц и волк, причем $AB = BC = a$. Скорость бега зайца вдвое больше скорости бега волка. Заяц по отрезку AD бежит в лес. Для каких точек D прямой p заяц не может быть схвачен волком на отрезке AD ?

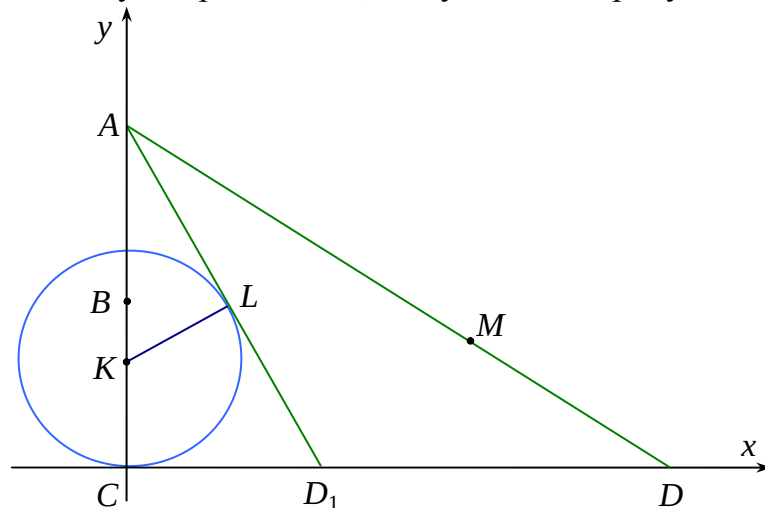


Решение. Назовем точку M неопасной, если заяц может добежать до неё по прямой быстрее волка. Чтобы заяц не мог быть схвачен волком на отрезке AD , необходимо и достаточно, чтобы этот отрезок состоял только из неопасных точек.

Если v — скорость волка, то $2v$ — скорость зайца. Заяц добежит по прямой от A до M за время $t_1 = \frac{AM}{2v}$, а волк от B до M — за время $t_2 = \frac{BM}{v}$.

Точка M неопасна, если $t_1 < t_2$, то есть, если $AM < 2BM$.

Выберем систему координат так, как указано на рисунке.



Тогда $A(0; 2a)$ и $B(0; a)$ — начальные положения соответственно зайца и волка, поэтому точка $M(x; y)$ неопасна, если

$$\sqrt{x^2 + (y - 2a)^2} < 2\sqrt{x^2 + (y - a)^2}.$$

После преобразований приходим к неравенству

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

Таким образом, точка M неопасна, если она лежит вне круга, имеющего центр $K\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ и радиус $\frac{2}{3}a$, а отрезок AD состоит только из неопасных точек,

если он весь лежит вне этого круга.

Если отрезок AD_1 касается этого круга в точке L , то $KL \perp AD_1$, $KL = \frac{2}{3}a$,
 $KA = 2a - \frac{2}{3}a = \frac{4}{3}a$, следовательно, $\angle CAD_1 = 30^\circ$ и $CD_1 = 2a \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ответ: точки D таковы, что $CD > \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

11.5. Найдите целочисленные решения уравнения:

$$(2x - 1)(y^2 + x - 5) = x^2 + 1.$$

Решение. 1) Так как x и y — целые числа, то из уравнения следует, что $(x^2 + 1) : (2x - 1)$. Тогда $4(x^2 + 1)$ тоже делится на $(2x - 1)$. Но

$$4(x^2 + 1) = (4x^2 - 1) + 5 = (2x + 1)(2x - 1) + 5;$$

здесь первое слагаемое делится на $(2x - 1)$, поэтому и $5 : (2x - 1)$. Делителями числа 5 являются числа ± 1 и ± 5 , т.е. либо $2x - 1 = \pm 1$, либо $2x - 1 = \pm 5$. Отсюда $x \in \{0, 1, -2, 3\}$.

2) Если $x = 0$, то исходное уравнение принимает вид $-(y^2 - 5) = 1$, откуда $y = \pm 2 \in \mathbb{Z}$;

если $x = 1$, то исходное уравнение принимает вид $(y^2 - 4) = 2$, откуда $y^2 = 6$, т.е. $y \notin \mathbb{Z}$;

если $x = -2$, то исходное уравнение принимает вид $-5(y^2 - 7) = 5$, откуда $y^2 = 6$, т.е. $y \notin \mathbb{Z}$;

если $x = 3$, то исходное уравнение принимает вид $5(y^2 - 2) = 10$, откуда $y = \pm 2 \in \mathbb{Z}$.

Ответ: 4 решения: $(x; y) \in \{(0; -2), (0; 2), (3; -2), (3; 2)\}$.