11 класс

11.1 Решите уравнение $2x^3 + x^2y - xy^2 = 0$.

Решение:
Любая пара $(x, y), x = 0, y \in R$ является решением исходного уравнения.
Найдем (x, y) для $x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на x^3.
Получаем:

$$\frac{2x^3 + x^2y - xy^2}{x^3} = 0,$$

$$2 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0.$$

Введем переменную

$$\frac{y}{x} = t,$$

получим

$$t^2 - t - 2 = 0, t = -1, t = 2, \text{т. е. } y = -x \text{ или } y = 2x.$$

Тогда любые пары чисел $(x, -x)$ и $(x, 2x), x \in R\backslash\{0\}$, являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $(0, y)$, $(x, -x)$, $(x, 2x), x \in R\backslash\{0\}$.

11.2 Найдите $sin^3\alpha + cos^3\alpha$, если $sin\alpha + cos\alpha = m$.

Решение:
Так как $sin^2\alpha + 2sin\alpha cos\alpha + cos^2\alpha = m^2$, то

$$sin\alpha cos\alpha = \frac{m^2-1}{2}.$$

Следовательно,

$$sin^3\alpha + cos^3\alpha = (sin\alpha + cos\alpha)(sin^2\alpha - sin\alpha cos\alpha + cos^2\alpha)$$
$$= m\left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{m(3 - m^2)}{2}$$

Ответ: $\frac{m(3-m^2)}{2}$.

11. 3 При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + a^2 + 2 - 2x - 2a} + \sqrt{x^2 + a^2 - 6x + 9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение:
Запишем второе уравнение в виде
$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+a^2}=\sqrt{5}.$$
Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;a)$ до точек $(1;1)$ и $(3;0)$ равно $\sqrt{5}$ (рисунок 1). Поскольку расстояние между точками $(1;1)$ и $(3;0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;1)$ и $(3;0)$ (рисунок 2). Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a=\frac{3-x}{2}$ и условию $x \in [1;3]$.

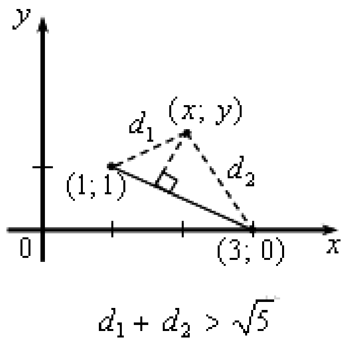

рисунок 1

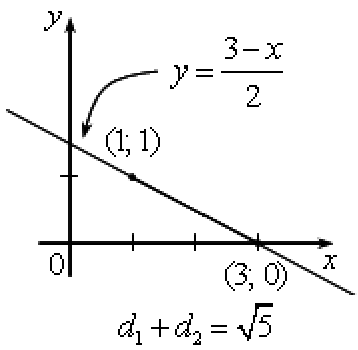

рисунок 2

Таким образом, исходная система равносильна системе
$$\begin{cases} 2^{1+x}=32a\sqrt{2}, \\ 2a=3-x, x\in[1;3]. \end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем
$$2^{1+x}=16(3-x)\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}=3-x \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}}+x=3.$$

Поскольку функция $y=2^{x-\frac{7}{2}}+x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Методом подбора $x=\frac{5}{2}$ – единственное, ему соответствует $a=\frac{1}{4}$.

Ответ: Если $a=\frac{1}{4}$, то $x=\frac{5}{2}$, при остальных a нет решений.

11.4 В треугольнике ABC известны стороны: AB = 6, BC = 8, AC = 9. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение:

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рисунок 1).

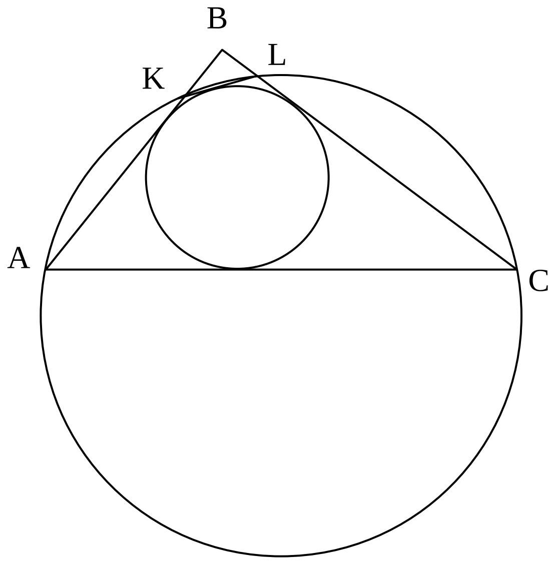

рисунок 1

Четырёхугольник $AKLC$ – вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180^{\circ} - \angle KLC = \angle BLK$.

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC – общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$
$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k);$$
$$k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим

$$k = \frac{6+8-9}{6+8+9} = \frac{5}{23}.$$

Следовательно,

$$KL = \frac{5}{23} \cdot AC = \frac{45}{23}.$$

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рисунок 2).

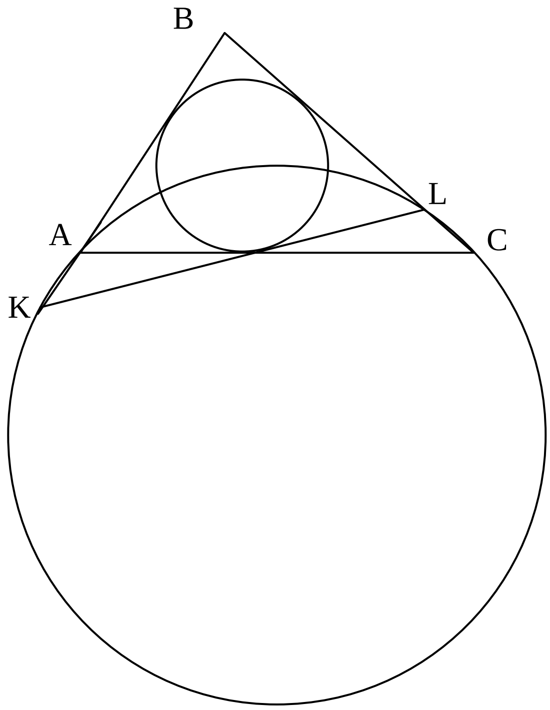

рисунок 2

Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK. Так как угол ABC – общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.
Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}$, 9.

11.5 На доске написано четырехзначное восьмеричное число x, у которого пара старших цифр такая же, как пара младших цифр. Если записать x в десятичной системе, то оно будет читаться одинаково слева направо и справа налево. Что написано на доске?

<u>Решение:</u>
x_{10} – десятичная запись восьмеричного числа, записанного на доске

$$x_{10} = abab_8 = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 + a \cdot 8^1 + b \cdot 8^0 = a(8^3 + 8^1) + b(8^2 + 8^0)$$
$$= (8^2 + 1) \cdot (8a + b) = (1 + 64) \cdot ab_8 = 5 \cdot 13 \cdot ab_8$$

Поэтому x_{10} делится на 5 и на 13. В частности, x_{10} начинается и заканчивается на 5. Поскольку $1000_8 > 100$ и $7777_8 < 10000$, то число x_{10} может быть либо четырехзначным, либо трехзначным.
Рассмотрим оба случая.
$x_{10} = 5cc5_{10}$. $5cc5_{10} = 5005 + 110c = 5(1001 + 22c)$. Тогда $(1001 + 22c)$ делится на 13. Так как 1001 кратно 13, на 13 делится и $22c$ и, значит, c, что возможно только при $c = 0$. Но число $5005_{10} = 11615_8$, что не удовлетворяет условию задачи.
$x_{10} = 5c5_{10}$. $5c5_{10} = 505 + 10c = 5(101 + 2c)$. Тогда $(101 + 2c)$ делится на 13. Так как $101 = 13 \cdot 8 - 3$, остаток от деления $2c$ на 13 должен быть равен 3. Это возможно при $c = 8$. Таким образом, $x_{10} = 585_{10} = 1111_8$.

Ответ: 1111.