10 класс

10.1 Решите уравнение:

$$x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Решение:

Заметим, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Поэтому, деля обе части уравнения на $x^3 \neq 0$, мы не теряем решения $x = 0$.

$$x^3 - 3x^2 + 6x^6 - 7 + 6\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0.$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0.$$

Делаем подстановку

$$y = x + \frac{1}{x},$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = y(y^2 - 3).$$

Данное уравнение имеет вид

$$y(y^2 - 3) - 3(y^2 - 2) + 6y - 7 = 0,$$

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0,$$

$$y = 1,$$

$$x + \frac{1}{x} = 1,$$

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Полученное уравнение корней не имеет.

Ответ: действительных корней нет.

10.2 Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^{x-y} = y^{x+y} \\ \sqrt{x} \cdot y = 1. \end{cases}$$

Решение:

Заметим, что решение данной системы следует искать только на множестве, определяемом условиями

$$x > 0, y > 0 \ (*).$$

Применим метод подстановки. Из второго уравнения следует

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}.$$

С учетом (*) это значение подставим в первое уравнение системы:

$$x^{x-x^{-\frac{1}{2}}} = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{x+x^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x^{x-x^{-\frac{1}{2}}} = x^{\frac{x+x^{-\frac{1}{2}}}{2}}.$$

Если $x = 1,$ то $y = 1$, поэтому (1;1) – решение системы. Если $x \neq 1$, то

$$x - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x + x^{-\frac{1}{2}}}{2} \Leftrightarrow 3x = x^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.$$

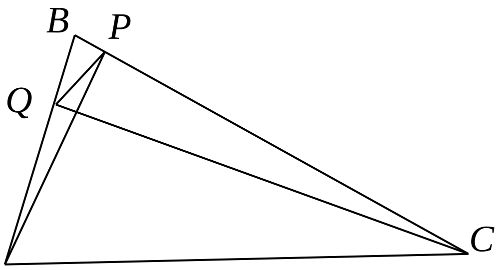
Тогда

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{9}}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3}.$$

Ответ: $(1;1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}, \sqrt[3]{3}\right)$.

10.3 В остроугольном треугольнике *ABC* из вершин *A* и *B* опущены высоты *AP* и *CQ* на стороны *BC* и *AB*. Известно, что площадь треугольника *ABC* равна 18, площадь треугольника *BPQ* равна 2, а длина отрезка *PQ* равна $2\sqrt{2}$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*.

Решение:



Из прямоугольных треугольников *ABP*, *BCQ* находим

$$\frac{BP}{AB} = cos\angle B, \quad \frac{BQ}{BC} = cos\angle B.$$

Из этих равенств следует, что треугольники *BPQ*, *ABC* подобны (по двум сторонам и углу между ними), причем коэффициент подобия равен $cos\angle B$. так как отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия, то

$$cos^2\angle B = \frac{S_{BPQ}}{S_{ABC}} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

По условию треугольник *ABC* остроугольный, значит, $cos\angle B > 0$ и, следовательно, $cos\angle B = \frac{1}{3}$. Из подобия треугольников *BPQ* и *ABC* вытекает равенство

$$\frac{PQ}{AC} = cos\angle B = \frac{1}{3}, \qquad AC = 3 \cdot PQ = 6\sqrt{2}.$$

Обозначим через *R* радиус окружности, описанной вокруг треугольника *ABC*. По теореме синусов

$$2R = \frac{AC}{sin\angle B} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = 9,$$

откуда

$$R = \frac{9}{2}.$$

Ответ: $\frac{9}{2}$.

10.4 В магазине было 6 ящиков с гвоздями весом в 15, 16, 18, 19, 20 и 31 кг. Два покупателя взяли 5 ящиков, причем один взял по весу в два раза больше другого. Какой ящик остался в магазине?

Решение:

Будем искать решение методом перебора относительно идеи, какой ящик остался в магазине. В условии задачи сказано, что у одного покупателя вес груза был в два раза больше, чем у другого. Следовательно, если $2x$ – вес груза первого покупателя, то x – вес груза второго.

Отсюда следует, что суммарный вес 5 купленных ящиков равен $3x$, т.е. сумма делится на три.

Составим таблицу.

Вес некупленного ящика (кг)	Вес купленных ящиков	Сумма остатков при делении веса ящика на три	Вывод
31	15, 16, 18, 19,20	0+1+0+1+2=4	Не решение
20	15,16 18, 19, 31	0+1+0+1+1=3	Решение
19	15,16 18, 20, 31	0+1+0+2+1=4	Не решение
18	15, 16, 19, 20, 31	0+1+1+2+1=5	Не решение
16	15, 18, 19, 20, 31	0+0+1+2+1=4	Не решение
15	16, 18, 19, 20, 31	1+0+1+2+1=5	Не решение

Ответ: 20 кг.

10.5 В каком году родились люди, которым в 2015 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр их года рождения?

Решение:

Сумма цифр года рождения людей, родившихся в XIX веке, не превышает 27. Следовательно, такие люди могут родиться только в XX или XXI веке. Рассмотрим оба случая отдельно:

$2015-\overline{19xy}=1+9+x+y \Leftrightarrow 105=11x+2y$. Из уравнения следует, что 2y число четное, а значит $11x$ *нечетное, тогда* x нечетная цифра и равна 9 (иначе не подобрать y), а y = 3.

$2015-\overline{20xy}=2+0+x+y \Leftrightarrow 13=11x+2y$. Из уравнения следует, что x = 1, y = 1.

Ответ: 1993, 2011.