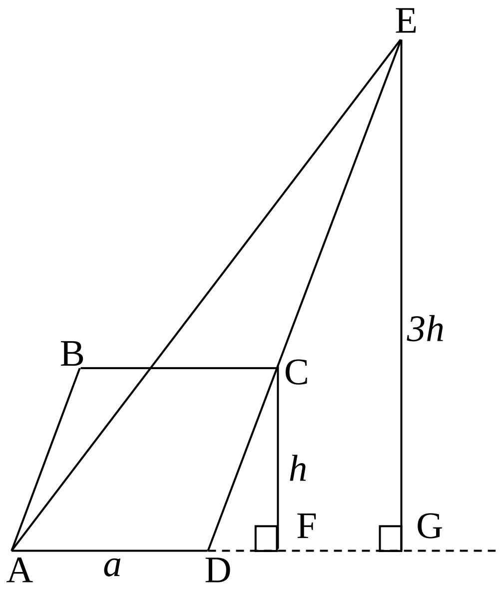
10 класс

10.1. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 66. На луче *DC* взята точка *E* так, что *CE=2·DC*. Найдите площадь треугольника *EDA*.

Решение:

См. рисунок.



DE=3DC.

$S_{ABCD}=ah=66$.

Треугольники DCF и DEG – подобны. Отсюда, если CF=h, то EG=$3h$.

Площадь треугольника EDA:

$S_{EDA}=\frac{1}{2}a\cdot 3h=\frac{3}{2}\cdot 66=99$.

Ответ: 99.

10.2* Заданы числа p и q, причем $p>q$, $p-q\neq 1$. Найдите корни уравнения $x^2+px+q=x^3+qx+p$.

Решение:

$x^2+px+q=x^3+qx+p$.

Выполним преобразования:

---

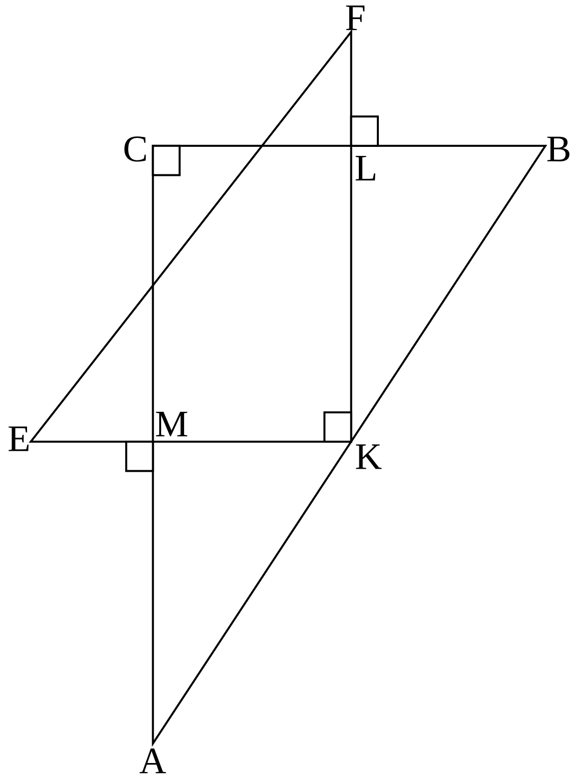
* При тиражировании заданий была допущена опечатка. В задании было указано «Найдите корни уравнения $x^2+px+q=x^2qx+p$» В такой формулировке решение задачи является крайне трудоемким. В связи с этим оргкомитетом олимпиады принято решение снять задачу 10.2 с проверки и оценивать решения участников-десятиклассников из максимума в 28 баллов – 4 задачи по 7 баллов каждая (а не 35 баллов – 5 задач по 7 баллов каждая). Оргкомитет олимпиады приносит участникам свои извинения.

$x^3 - x^2 + (q-p)x - (q-p) = 0,$
$x^2(x-1) + (q-p)(x-1) = 0,$
$(x-1)(x^2 + q - p) = 0,$
откуда:
$x = 1$ или $x^2 + q - p = 0, x^2 = p - q, x = \pm\sqrt{p-q}.$

Ответ: 1; $\pm\sqrt{p-q}$.

10.3 Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 4. Середина каждого катета является началом отрезка единичной длины, направленного во внешнюю сторону от треугольника и перпендикулярного этому катету. Найдите расстояние между концами этих двух отрезков.

Решение:
См. рисунок.



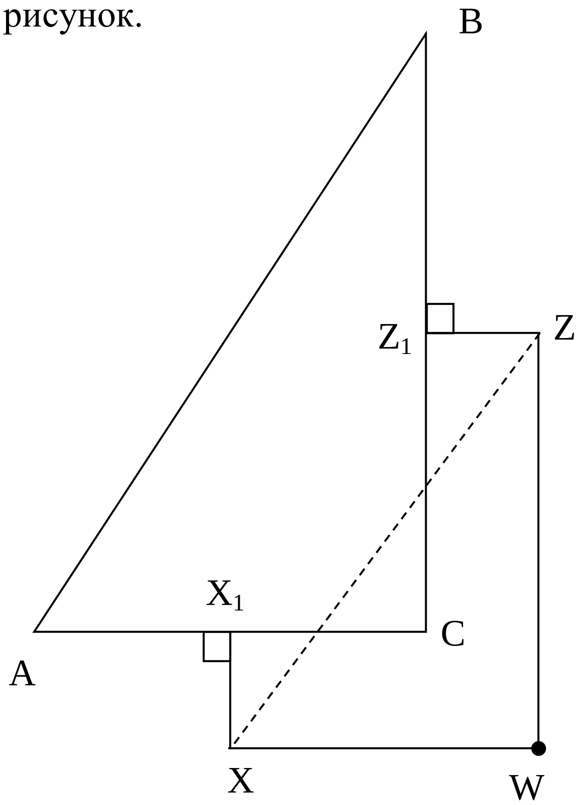
AC=6, BC=4.

Отрезки ME и LF, о которых говорится в условии, являются продолжениями средних линий KM и KL. Поэтому KE=KM+ME=2+1=3, KF=3+1=4. Из прямоугольного треугольника EKF находим $EF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Ответ: 5.

Альтернативный вариант решения **задачи 10.3** (предложен одним из участников олимпиады)

См. рисунок.



Пусть в прямоугольном треугольнике ACB: BC=6, AC=4. Отрезки, о которых говорится в условии – X_1X и Z_1Z.

Проведем отрезок ZW, параллельный стороне BC, и отрезок XW, параллельный стороне AC. Точка W – точка пересечения отрезков.

$XW = X_1C + Z_1Z = 2 + 1 = 3$.

$ZW = Z_1C + X_1X = 3 + 1 = 4$.

По теореме Пифагора: $XZ^2 = ZW^2 + XW^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

$ZX = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

10.4 Найдите $x + y$, если $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

Решение:

По условию $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1$.

Умножим это равенство на $\sqrt{1+x^2}-x \neq 0$.

Так как $\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2$,

то получим: $y+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}-x,\ x+y=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}$.

Аналогично получим $y+x=\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+x^2}$. Сложив два последних равенства, найдем $2(x+y)=0,\ x+y=0$.

Ответ: *x+y=0.*

10.5 Докажите, что если $0<x<\frac{1}{3}$, то $(1-x)(1-2x)(1-3x)<\frac{1}{1+6x}$.

<u>Решение:</u>

Заметим, что если $0<t<1$, то $0<1-t<\frac{1}{1+t}$.

В самом деле, $1-t^2<\ 1, (1-t)(1+t)<1,\ \ 1-t<\frac{1}{1+t}$. В нашей задаче $0<x, 2x, 3x<1$, поэтому $0<1-x<\frac{1}{1+x}$, $0<1-2x<\frac{1}{1+2x}$, $0<1-3x<\frac{1}{1+3x}$.

Перемножим три вышеуказанных неравенства:

$(1-x)(1-2x)(1-3x)<\frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)}$.

Рассмотрим знаменатель $(1+x)(1+2x)(1+3x)$.

Раскрывая скобки, увидим, что он имеет вид $1+x+2x+3x+$ какие $-$ то положительные слагаемые.

Таким образом:

$(1+x)(1+2x)(1+3x)>1+6x$, т.е. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)}<\frac{1}{1+6x}$.

Доказано.