10 класс

10.1 Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный по модулю от 1.

Решение:

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии, тогда на основании определения геометрической прогрессии запишем:

$$y = xq, \quad z = xq^2.$$

На основании одного из свойств членов арифметической прогрессии имеем уравнение $2 \cdot 2y = x + 3z.$

В этом уравнении выразим y и z через x и q:

$4xq = x + 3xq^2.$

Вынесем x за скобки:

$x(3q^2 - 4q + 1) = 0.$

Заметим, что $x \neq 0$ (в противном случае задача не имела бы смысла), из последнего равенства получаем $3q^2 - 4q + 1 = 0.$

Решая уравнение, находим

$q = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \dfrac{2 \pm 1}{3}, q_1 = 1, q_2 = \dfrac{1}{3}.$ Смыслу задачи удовлетворяет $q = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

10.2 Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$(2y - 2x - 3633)\left(1580^{x^2} + x^2 + x + 3\right) = 1580.$$

Решение:

Произведение двух целых чисел равно 1580 – четному числу. Выражение в первой скобке – нечетное число. Значит, выражение во второй скобке должно быть четным числом. Запишем

$$1580^{x^2} + x^2 + x + 3 = 1580^{x^2} + x(x+1) + 3.$$

Выражение $x(x+1)$ – четное, $x(x+1) + 3$ – нечетное, значит, 1580^{x^2} должно быть нечетным. Это возможно в единственном случае при $x = 0$. Подставляем найденное значение x, получим уравнение

$$(2y - 3633)4 = 1580, \text{ откуда } y = 2014.$$

Ответ: $x = 0, y = 2014$.

10.3 Микрокалькулятор умеет производить над числами, занесенными в память, только три операции:
1) проверять, равны ли выбранные два числа;
2) складывать выбранные числа;
3) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.
Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число y. Как с помощью микрокалькулятора узнать, равно ли это число единице?

Решение:
В памяти есть число y. Сложением его с самим собой получаем $2y$. Сравниваем эти числа (y и $2y$). Если они равны, то $y = 0$, иначе $y \neq 0$. Тогда найдем корни $x^2 + 2yx + y = 0, \quad x_{1,2} = -y \pm \sqrt{y^2 - y}$.

Если $x_1 \neq x_2$ или корней нет, то $y \neq 1$, в противном случае $y = 1$.

Решение получено.

10.4 Лицеист сбежал вниз по движущемуся эскалатору в гипермаркете и насчитал 30 ступенек. На первом этаже гипермаркета он увидел завуча лицея, побежал вверх по тому же эскалатору с той же скоростью относительно эскалатора и насчитал 150 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, спустившись по неподвижному эскалатору?

Решение:
При движении вниз лицеист насчитал меньше ступеней, чем при движении вверх, следовательно, эскалатор движется вниз.

Пусть n – число ступеней у неподвижного эскалатора,

$x \cdot \left(\frac{\text{ступеней}}{\text{минута}}\right)$ – скорость движения лицеиста относительно эскалатора,

$y \cdot \left(\frac{\text{ступеней}}{\text{минута}}\right)$ – скорость движения эскалатора,

t_1(мин) – время движения вниз,

t_2(мин) – время движения вверх, тогда

$$\begin{cases} xt_1 = 30 = n - yt_1 \\ xt_2 = 150 = n + yt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{30}{t_1} = \dfrac{n}{t_1} - y \\ x = \dfrac{150}{t_2} = \dfrac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{30}{t_1} = \dfrac{150}{t_2} \\ \dfrac{30}{t_1} = \dfrac{n}{t_1} - y \\ \dfrac{150}{t_2} = \dfrac{n}{t_2} + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

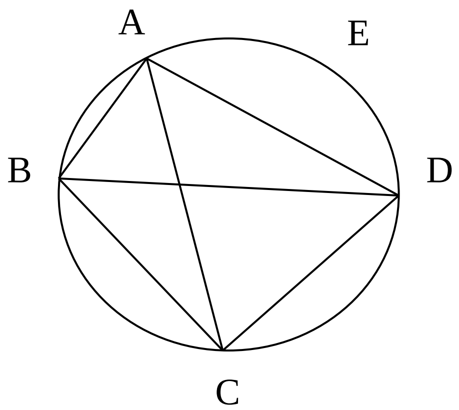
$$\begin{cases} t_2 = 5t_1 \\ \dfrac{30}{t_1} + \dfrac{150}{t_2} = \dfrac{n}{t_1} + \dfrac{n}{t_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1} = \frac{n}{t_1} + \frac{n}{5t_1} \Rightarrow 6n = 300 \Leftrightarrow n = 50$$

Ответ: 50 ступенек.

10.5 Диагональ *BD* четырехугольника *ABCD* является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите длину диагонали *AC*, если *BD* = 2, *AB* = 1, $\dfrac{\angle ABD}{\angle DBC} = \dfrac{4}{3}$.

Решение:



Так как *BD* – диаметр окружности, то $\angle BAD = \angle BCD = \dfrac{\pi}{2}$. Обозначим $\angle ABD = x$, тогда из прямоугольного треугольника *ABD* получаем, что $\cos x = \dfrac{AB}{BD}$. По условию $BD = 2,$ $AB = 1$, значит, $\cos x = \dfrac{1}{2}$, и так как x –

внутренний угол прямоугольного треугольника ABD, то $x = \frac{\pi}{3}$. Тогда $\angle DBC = \frac{3}{4}\angle ABD = \frac{\pi}{4}$. Вписанные углы $\angle ACD, \angle ABD$ опираются на одну и ту же дугу AED, значит, $\angle ACD = \angle ABD = \frac{\pi}{3}$. Из треугольника ADC по теореме синусов получаем, что

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AD}{\sin\angle ACD},$$

откуда $AC = \dfrac{AD \cdot \sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}$, так как $AD = AB \cdot tgx = \sqrt{3}$, то

$\angle ADC = \pi - \angle ABD - \angle DBC = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$AC = \frac{\sqrt{3}\cdot\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

Ответ: $AC = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.