10 класс

10.1 Решите уравнение

$$x^3 = 3y^3 + 9z^3$$

в целых неотрицательных числах x, y, z.

Решение:

Из уравнения видно, что число x делится на 3: $x = 3x_1$, где x_1 – целое неотрицательное число. Получаем:

$27{x_1}^3 = 3y^3 + 9z^3, 9{x_1}^3 = y^3 + 3z^3$.

Из последнего равенства следует, что y делится на 3: $y = 3y_1$, где y_1 – целое неотрицательное. Тогда

$9{x_1}^3 = 27{y_1}^3 + 3z^3$,

$3{x_1}^3 = 9{y_1}^3 + z^3$.

Теперь уже z делится на 3: $z = 3z_1$, где z_1 – целое неотрицательное. Получаем

${x_1}^3 = 3{y_1}^3 + 9{z_1}^3$.

Обратим внимание, что получилось уравнение того же вида, что и первоначальное. Поэтому из него тем же способом находим, что числа x_1, y_1, z_1 делятся на 3. Следовательно, числа x, y, zделятся на 3^2.

Аналогично находим, что числа x, y, zделятся на 3^3, потом – на 3^4, вообще, на 3^n , где n– любое натуральное число. Но из всех целых неотрицательных (да и вообще целых) чисел этим свойством обладает только ноль. Кроме того, значения $x = 0, y = 0, z = 0$ удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x = 0, y = 0, z = 0$.

10.2 Найдите все целые значения x и y, при которых, по меньшей мере, одно из чисел $x^2 - 2xy + 2y^2$ и $x^2 + 2xy + 2y^2$ делится на 5.

Решение:

Делимость по меньшей мере одного из этих чисел на 5 равносильна делимости на 5 их произведения. Преобразуем его:

$$(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = ((x^2 + 2y^2) - 2xy)((x^2 + 2y^2) + 2xy) =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = x^4 + 4y^4.$$

Так как сумма $x^4 + 4y^4$ по условию делится на 5, то числа x и y или оба делятся, или оба не делятся на 5.

1) Если x и y делятся на 5, то все очевидно.

2) Пусть x и y не делятся на 5. Возможен ли этот случай?

Тогда x^4 и y^4 при делении на 5 дают в остатке 1:

$$x^4 = 5k + 1, \quad y^4 = 5l + 1,$$

где k и l – целые неотрицательные. Получаем:

$$x^4 + 4y^4 = (5k + 1) + 4(5l + 1) = 5k + 20l + 5.$$

Так как последняя сумма делится на 5, то и этот вариант возможен.

Ответ: все целые x и y, одновременно делящиеся или не делящиеся на 5.

10.3 Докажите, что при всех $x, 0 < x < \frac{\pi}{3}$, справедливо неравенство

$$sin2x + cosx > 1.$$

Решение:

1 способ:

Используя тождества $1 - cosx = 2sin^2\frac{x}{2}$, $sin2x = 4sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}cosx$, приводим неравенство к виду $2cosx > tg\frac{x}{2}$. Полученное неравенство справедливо в силу того, что $2cosx > 2cos\frac{\pi}{3} = 1, tg\frac{x}{2} > tg\frac{\pi}{6} < 1$.

2 способ:

Заметим, что функции $sin2x$ и $cosx$ выпуклы вверх на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Значит, их сумма $f(x) = sin2x + cosx$ также выпукла, поэтому график функции $f(x)$ на этом отрезке лежит не ниже прямой, соединяющей точки $(0; f(0))$ и $\left(\frac{\pi}{3}; f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Требуемое неравенство теперь следует из соотношений $f(0) = 1$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$.

10.4 Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся в каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равным числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за 2 дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду, было бы равным числу используемых аудиторий. Найдите минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменованным при этих условиях.

Решение:

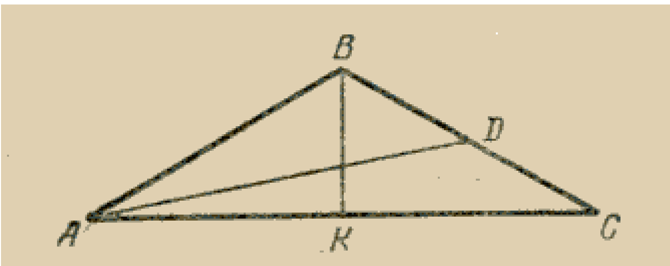
Обозначив число аудиторий в корпусах как n и k, соответственно, для первого и второго корпусов, получим, что число сдававших абитуриентов с одной стороны равно $3 \cdot n^2$, а с другой стороны – $2 \cdot k^3$. Таким образом, получаем уравнение $3 \cdot n^2 = 2 \cdot k^3$. Левая часть равенства делится на 3, следовательно, и правая тоже, т. е. $k \vdots 3$. Правая часть делится на 2, следовательно, $3 \cdot n^2 \vdots 2$. Но тогда n^2 делится на 2, а, значит, и на 4. В этом случае и правая часть делится на 4, а это возможно, если $k \vdots 2$. Таким образом $k = 6l, l \in N$. Тогда, подставляя это значение k в уравнение и производя сокращение на 3, получаем $n^2 = (12 \cdot l)^2$. Тогда минимальное значение n принимает при $l = 1$ и оно равно 12. Далее, находим число абитуриентов $3 \cdot 12^2 = 432$.

Ответ: 432.

10.5 Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{\pi}{6}$. Построен круг радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине этого треугольника, противолежащий основанию. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

Решение:

Пусть *ABC* – данный в условии задачи равнобедренный треугольник. Пусть *AD* – медиана, проведенная к боковой стороне *BC*, а *BK* – высота, опущенная из вершины треугольника на основание.



Из прямоугольного треугольника *BKC* находим, что

$$\frac{KC}{BC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{BK}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

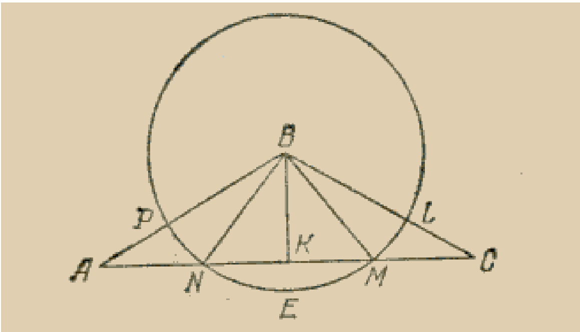
откуда $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}KC$, $BK = \frac{1}{2}BC$, и тогда $DC = \frac{1}{2}BC = \frac{KC}{\sqrt{3}}$. По теореме косинусов, поименной к треугольнику ADC, имеем

$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos 30^\circ$. Так как $AC = 2KC$, $AD = \sqrt{7}$, то отсюда следует равенство

$$7 = 4KC^2 + \frac{KC^2}{3} - 2 \cdot \frac{2KC \cdot KC}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

из которого следует, что $KC = \sqrt{3}$.

Но тогда $AC = 2\sqrt{3}$, $AB = BC = 2DC = 2$, $BK = 1$. Так как площадь треугольника ABC можно найти по формуле ABC $S = \frac{1}{2}AC \cdot BK$, то $S = \sqrt{3}$. Поскольку $2 > 2/\sqrt{3} > 1$, то радиус окружности больше, чем длина высоты BK треугольника ABC, но меньше, чем длина боковой стороны. Следовательно, окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$ с центром в вершине B пересекает основание AC в двух точках N и M.



Пусть эта окружность пересекает сторону AB в точке P, а сторону BC в точке L. Общая часть треугольника ABC и построенного круга есть «криволинейный пятиугольник» $BLMKNP$. Его площадь равна сумме площадей треугольника NBM и двух секторов MBL и NBP. Так как $\sin \angle KMB = \frac{BK}{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle KMB = \frac{\pi}{3}$, значит, треугольник NBM равносторонний. Поэтому $NM = BM = \frac{2}{\sqrt{3}}$ и

$$S_{NBM} = \frac{1}{2}NM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Далее, $\angle MBL = \angle BMN - \angle BCM = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, площадь сектора MBL равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi}{9}$. Аналогично, площадь сектора NBP

равна $\frac{\pi}{9}$. Таким образом, площадь «криволинейный пятиугольник» равна $S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9}$, а искомое отношение $\frac{S_1}{S} = \frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.

Ответ: $\frac{2\pi\sqrt{3}+9}{27}$.