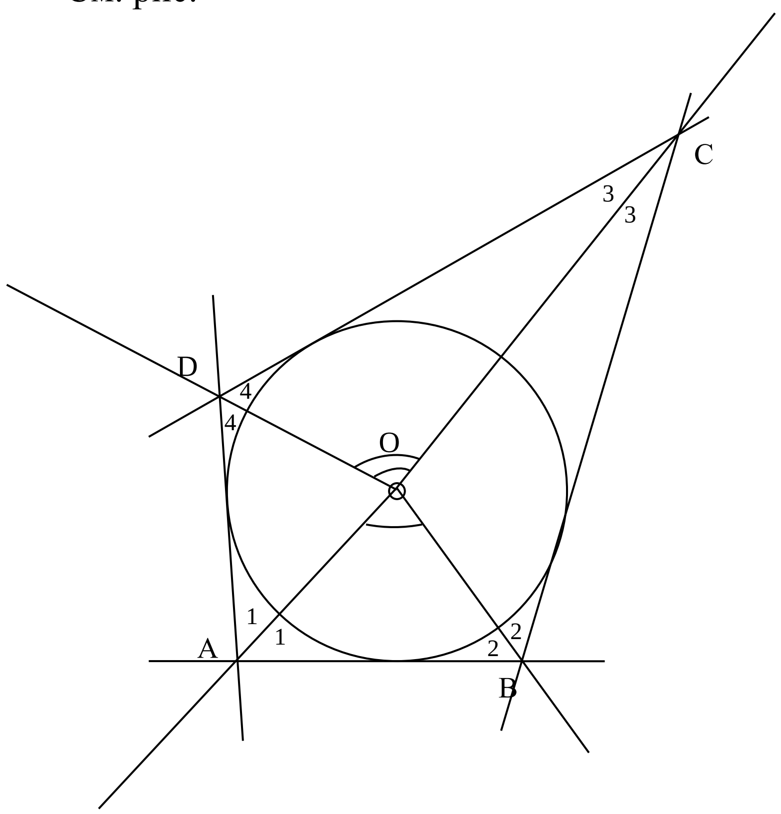
10 класс

10.1 Не является ли косинус функцией от синуса? Точнее, не существует ли такая функция *f*, что $\cos x = f(\sin x)$ при всех значениях x ?

Решение:
Предположим, что нашлась такая функция *f*, что $\cos x = f(\sin x)$ при всех x.
Тогда $f(0) = f(\sin 0) = \cos 0 = 1$ и $f(0) = f(\sin \pi) = \cos \pi = -1$.
Т.о., $f(0) = 1$ и $f(0) = -1$, что противоречиво.
Ответ: **не существует.**

10.2 Около окружности с центром *O* описан четырехугольник *ABCD*. Докажите, что сумма углов *AOB* и *COD* равна *180°*.

Решение:
См. рис.



OA является биссектрисой угла *A*, разбивает угол *A* на два равных угла – обозначены на рисунке цифрой *1*. Аналогично для других углов *B*, *C*, *D*.

Имеем: $\angle \mathrm{AOB} = 180° - \angle 1 - \angle 2$ (из *ΔAOB*),

$\angle \mathrm{COD} = 180° - \angle 3 - \angle 4$ (из *ΔCOD*).

Поэтому $\angle \mathrm{AOB} + \angle \mathrm{COD} = 360° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4)$.

Но $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (сумма внутренних углов четырехугольника *ABCD*), значит,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}360° = 180°$.

Окончательно $\angle AOB + \angle COD = 360° - 180° = 180°$.

Доказано.

10.3 $a + b \neq -1, b < 0$. Докажите, что если $x_0 < 0$ – корень уравнения $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$, то x_0 не является корнем уравнения $ax^5 + bx + 1 = 0$.

Решение:

Так как $b < 0$, $x_0 < 0$, то $bx_0^3 > 0$, и, значит, $ax_0^4 = -1 - bx_0^3 < 0$.

Но $x_0^4 > 0$, следовательно, $a < 0$. Тогда $ax_0^5 > 0$ (т.к. $a < 0$, $x_0^5 < 0$), $bx_0 > 0$ и $ax_0^5 + bx_0 + 1 > 0$.

Доказано.

10.4 Последовательность чисел x_1, x_2, x_3,… построена по закону: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$ при $n \geq 1$.

Докажите, что $x_n > \sqrt[3]{n^2}$ при $n > 1$.

Решение:

Ясно, что последовательность (x_n) возрастает: $x_{n+1} > x_n$. Поэтому последовательность $(\frac{1}{\sqrt{x_n}})$ убывает: $1 \geq \frac{1}{\sqrt{x_1}} > \frac{1}{\sqrt{x_2}} > \cdots > \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}} > \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.

Запишем n $(n > 1)$ равенств (закон построения последовательности):

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}},$$
$$x_3 = x_2 + \frac{1}{\sqrt{x_2}},$$
$$\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}}.$$

Просуммируем эти равенства, получим

$$x_1 + x_2 \ldots + x_n = 1 + x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} + x_2 + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + x_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}}.$$

Откуда: $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_{n-1}}}$.

Заменим каждое из n слагаемых в правой части меньшей величиной $\frac{1}{\sqrt{x_n}}$, придем к неравенству

$$x_n > \frac{1}{\sqrt{x_n}} + \frac{1}{\sqrt{x_n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \frac{n}{\sqrt{x_n}}.$$

Следовательно, $x_n\sqrt{x_n} > n$, $x_n^3 > n^2$, извлекая кубический корень из обеих частей неравенства, получим $x_n > \sqrt[3]{n^2}$, **что и требовалось доказать**.

10.5 Все члены геометрической прогрессии с положительным первым членом и знаменателем $q > 1$ являются некоторыми членами некоторой арифметической прогрессии. Докажите, что q – целое число.

Решение:

Лемма. Если последовательность чисел φ_1, φ_2, ..., образованная по закону $\varphi_{n+1} = q\varphi_n$, $n \geq 1$, состоит только из натуральных чисел, то q – целое (положительное) число.

Докажем лемму. Ясно, что q – рациональное число: $q = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{u}{v}$, где u, v – натуральные взаимно простые числа. Имеем:

$$\varphi_{n+1} = q\varphi_n = qq\varphi_{n-1} = q^2\varphi_{n-1} = \cdots = q^n\varphi_1 = \frac{u^n\varphi_1}{v^n}.$$

Видим, что число $u^n\varphi_1$ делится на v^n. Но u^n и v^n взаимно просты, поэтому на v^n делится число φ_1 – при любом *n!* Это возможно, только если $v = 1$. Т.о. $q = u$ – целое число.

Вернемся к нашей задаче. Члены геометрической прогрессии имеют вид bq^n ($n \geq 0$, $b > 0$), а члены соответствующей арифметической прогрессии имеют вид $a + md$ ($m \geq 0$, $a > 0$, $d > 0$ – разность прогрессии). По условию задачи для любого номера $n \geq 0$ найдется такой номер $f(n) \geq 0$, что

$$bq^n = a + f(n)d.$$

Поэтому $\frac{a+f(n+1)d}{a+f(n)d} = \frac{bq^{n+1}}{bq^n} = q$, откуда $a + f(n+1)d = qa + qf(n)d$,

$$\big(f(n+1) - qf(n)\big)d = qa - a.$$

Отсюда видно что разность $f(n+1) - qf(n)$ одна и та же при всех n.

Следовательно,

$$f(n+2) - qf(n+1) = f(n+1) - qf(n),$$

т.е. $f(n+2) - f(n+1) = q(f(n+1) - f(n))$.

Полагая $\varphi_n = f(n+1) - f(n)$ и применяя затем лемму, получаем требуемое: q – целое.

Доказано.