10 класс

10.1 Решите систему уравнений $\begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} \\ x = y + 5 \end{cases}$.

Решение:

Сделаем подстановку

$u = \sqrt{x}, u \geq 0, v = \sqrt{y}, v \geq 0.$ (2)

В новых переменных исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} u^3 - u = v^3 + 8v \\ u^2 = v^2 + 5 \end{cases} \quad (3)$$

Обе части первого уравнения системы (3) возведем в квадрат:

$$\begin{cases} (u^3 - u)^2 = (v^3 + 8v)^2 \\ u^2 = v^2 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2(u^2 - 1)^2 = v^2(v^2 + 8)^2 \\ u^2 = v^2 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 = v^2 + 5 \\ (v^2 + 5)(v^2 + 4)^2 = v^2(v^2 + 8)^2 \end{cases} \quad (4)$$

Решим второе уравнение системы

$(v^2 + 5)(v^4 + 8v^2 + 16) = v^2(v^4 + 16v^2 + 64)$

$v^6 + 8v^4 + 16v^2 + 5v^4 + 40v^2 + 80 = v^6 + 16v^4 + 64v^2$

$3v^4 + 8v^2 - 80 = 0, v^2 = t, t \geq 0$

$3t^2 + 8t - 80 = 0$

С учетом того, что $t \geq 0$, получаем $v^2 = 4$. Таким образом,

$$\begin{cases} v^2 = 4 \\ u^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(9; 4)$.

10.2 Найдите сумму n первых членов последовательности (x_n), если

$$x_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Решение:

Требуется найти сумму

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}.$$

Заметив, что

$$\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)} = \frac{2}{(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

откуда

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right),$$

находим

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{2n}{2(2n+1)} = \frac{n}{(2n+1)}.$$

Ответ: $\frac{n}{(2n+1)}$.

10.3 Найти a, при которых уравнение имеет решения

$$cos2x + asinx = 2a - 7.$$

Решение:

Пусть $y = sinx$.

Тогда уравнение примет следующий вид

$$1 - 2y^2 + ay = 2a - 7$$
$$2y^2 - ay + (2a - 8) = 0$$
$$D = a^2 - 4\cdot 2\cdot(2a-8) = a^2 - 16a + 64 = (a-8)^2$$
$$y_1 = \frac{a + a - 8}{4};\ y_1 = \frac{1}{2}(a-4)$$
$$y_2 = 2$$

Уравнение $sinx = 2$ корней не имеет.

$$sinx = \frac{1}{2}(a-4)$$

Найдем значения а, при которых это уравнение имеет решения.

$$\frac{1}{2}|a-4| \leq 1$$

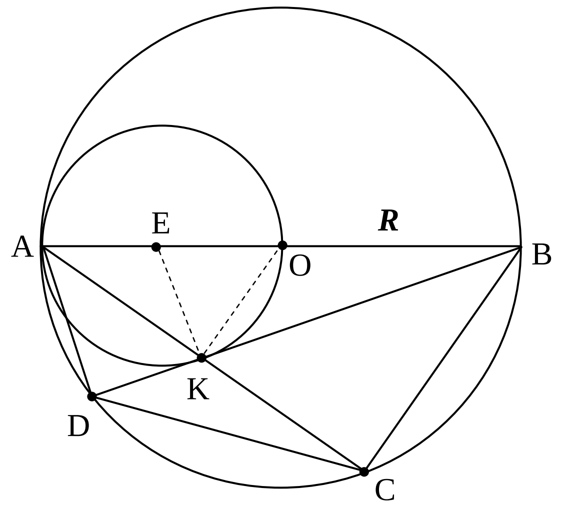
$$|a-4| \leq 2$$

$$2 \leq a \leq 6$$

Ответ: $2 \leq a \leq 6$

10.4 В окружности с центром *O* и радиусом *R* провели диаметр *AB*, после чего на отрезке *OA*, как на диаметре, построили еще одну окружность. Хорда *BD* касается второй окружности в точке *K*. Прямая *AK* пересекает первую окружность в точке *C*. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*.

Решение:



1) По свойству секущей и касательной, проведенных к окружности из одной точки, имеем $BO \cdot BA = BK^2$, откуда $BK = R\sqrt{2}$.

2) Из подобия треугольников ABD и EBK следует

$$\frac{AD}{EK} = \frac{AB}{EB} = \frac{DB}{KB}$$

откуда получаем

$$AD = \frac{2}{3}R, BD = \frac{4\sqrt{2}}{3}R.$$

3) $DK = BD - BK, DK = \frac{\sqrt{2}}{3}R$.

4) $AK = \sqrt{AD^2 + DK^2}, AK = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

5) В треугольнике ABC OK является средней линией (теорема Фалеса), поэтому $KC = AK = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

6) $AC = AK + KC, AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

7) Из треугольника AKD $sin\angle AKD = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

8) По формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot sin\angle AKD$ находим $S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{2}}{9}R^2$.

Ответ: $S_{ABCD} = \frac{8\sqrt{2}}{9}R^2$

10.5 По кругу сидят 2010 хамелеонов. Каждый из них может менять свой цвет в следующем порядке: синий, оранжевый, фиолетовый, зеленый, синий и т.д. Если прикоснуться к одному из хамелеонов, то он меняет свой цвет на следующий по порядку. При этом одновременно с ним меняют свой цвет трое хамелеонов, следующих за ним по часовой стрелке. Сначала все хамелеоны синие. Можно ли добиться того, чтобы все они стали зелеными? (Ответ обоснуйте).

Решение:

Поставим в соответствие каждому из цветов число: синему – 0; оранжевому – 1; фиолетовому – 2; зеленому – 3. Сначала хамелеоны все синие и сумма всех чисел равна 0, то есть кратна 4. При прикасании к какому-нибудь хамелеону сумма чисел увеличивается на 4. Без ограничения общности можно считать, что каждому из хамелеонов поставлен в соответствие один из возможных остатков от деления натуральных чисел на 4. Поэтому на каждом шаге такого процесса сохраняется делимость на 4. Однако сумма чисел 2010 зеленых хамелеонов равна 6030, и не кратна 4. Противоречие.

Ответ: этого добиться нельзя.